

Société de Calcul Mathématique SA

Outils d'aide à la décision

depuis 1995



Stabilité d'un talus :

Approche selon Archimède

Rapport rédigé par la Société de Calcul Mathématique SA

I. Objet

Le présent rapport est extrait du rapport final, remis par la Société de Calcul Mathématique SA à la RATP en réponse à la commande RATP no 50472136 du 29/09/2022, Unité émettrice : GDI/GDI89/51527. Il est limité à l'ensemble des questions qui sont du domaine public.

II. Remerciements

La SCM tient à remercier l'ensemble de l'équipe RATP : MM. Denis Mion, Pierre-Emmanuel Quemener, Christophe Auclair, Christophe Lamothe, tout d'abord pour le suivi attentif et amical de nos travaux, mais surtout pour nous avoir proposé un sujet d'étude particulièrement original.

La SCM remercie en outre ses correspondants, qui ont permis, par leurs conseils et critiques, l'amélioration des premières versions de ce rapport :

- M. Gilles Causse, Vinci Construction Grands Projets
- M. Serge Laurence, Bouygues Energies & Services
- M. Jean-Louis Durville, Ingénieur-géologue au Laboratoire Central des Ponts et Chaussées
- M. Jean-Pierre Magnan, IFSTTAR
- M. Olivier Loiseau, Institut de Radioprotection et de Sécurité Nucléaire

D'autres, très nombreux, nous ont transmis toutes sortes de documents sur la question, confus et contradictoires, ce qui n'a fait qu'ajouter à notre perplexité. Qu'ils en soient néanmoins remerciés.

La SCM n'exerce aucune réserve de propriété sur le présent document : les mathématiques sont non brevetables et tous les raisonnements qui figurent dans le présent document sont du domaine public.

III. Rappel de la question posée

Elle concerne la stabilité de talus anciens (19^{ème} siècle), construits sur des lignes que la RATP exploite à l'heure actuelle, mais antérieurs à l'existence même de la RATP. Le présent rapport est établi pour répondre à la demande de la RATP : pouvons-nous disposer d'arguments permettant d'évaluer la stabilité de ces talus très anciens ?

Il est apparu que rien, dans la littérature existante, ne répondait à la question de manière satisfaisante. Nous nous sommes donc demandé comment Archimède l'aurait abordée. Les détails de son approche figurent au Chapitre I ; ils permettent la mise en œuvre de formules explicites.

Chapitre I

Approche selon Archimède

I. Références historiques

On peut imaginer le dialogue ci-dessous :

En cette première année des 139^{èmes} Olympiades, le Roi Hiéron de Syracuse fait venir Archimède et lui parle en ces termes :

Archimède, je vais avoir besoin de toi. Je veux faire construire une tranchée pour y mettre un aqueduc ; bien entendu cette tranchée doit être aussi horizontale que possible. Mais il y a cette colline, que tu vois là-bas : il va falloir la franchir et donc construire une tranchée. Si les murs de la tranchée sont verticaux, elle va s'effondrer. A l'inverse, si la pente est trop douce, il faut déplacer d'énormes quantités de terre. Pourrais-tu me calculer l'angle idéal, qui assure la stabilité sur le long terme, tout en réduisant le volume de terre à déplacer ?

Par ailleurs, voici un autre aqueduc, qui existe depuis longtemps et dont les murs tiennent bien. Pourrais-tu vérifier que les angles choisis sont appropriés et que les talus tiendront encore longtemps ?

Archimède se met au travail. Il a à sa disposition les outils qu'il a lui-même développés : calcul différentiel et intégral, discrétisation, éléments finis, bilans des forces, etc., que les mathématiques contemporaines ont su exploiter et développer.

Il a en outre à sa disposition des outils que les générations suivantes n'ont pas su utiliser comme la "méthode" (nous dirions aujourd'hui "méthode de comparaison") ; voir le livre [AMW]. Il est possible qu'il ait eu à sa disposition d'autres outils, qui ne nous sont pas parvenus.

Archimède connaissait particulièrement bien les questions liées à la densité des matériaux. A la demande du Roi Hiéron, il avait mis en évidence une fraude commise par un orfèvre dans la fabrication d'une couronne. La méthode employée relevait de ce que nous appelons aujourd'hui "contrôle non destructif" (il ne fallait pas abîmer la couronne) ; elle est particulièrement habile, en ce sens qu'elle prend en compte les multiples incertitudes. Une description enthousiaste en est donnée par Vitruve (Marcus Vitruvius Pollo) dans son traité en dix volumes "de l'architecture", écrit vers 30 av JC. Il écrit (Livre 9) : *Archimède a fait une foule de découvertes aussi admirables que variées. Parmi elles, il en est une surtout dont je vais parler, qui porte le cachet d'une grande intelligence...*

Voir le livre [AMW], page198 et <http://remacle.org/bloodwolf/erudits/Vitruve/livre9fr.htm>

Enfin, il disposait de capacités intellectuelles que l'on peut, à proprement parler, qualifier d'effrayantes. S'il est permis de parler de durée de retour pour le génie, on dira que Gauss est de classe 500 (on voit un Gauss tous les 500 ans) ; avec cette terminologie, Archimède serait de classe 5 000.

Nous ne savons pas si le dialogue ci-dessus a réellement existé, mais il n'est pas absurde : Archimède est considéré comme le "père de la physique statique" (Wikipedia) et le Roi Hiéron faisait fréquemment appel à lui pour des questions de ce genre. On peut estimer qu'il faudra vingt minutes à Archimède pour résoudre le problème. De nos jours, il faudra quelques mois à un spécialiste de la question.

Archimède rédigeait ce qui lui paraissait difficile ; à l'évidence, le problème ci-dessus ne l'était pas pour lui. Wikipedia : "On sait par Plutarque qu'Archimède ne considérait toutes ses machines que comme des divertissements de géomètre, et privilégiait la science fondamentale : Il tenait la mécanique pratique et toute technique utilitaire pour indignes et artisanales, et ne consacrait son ambition qu'aux objets dont la beauté et l'excellence étaient pures de tout souci de nécessité".

II. Idée générale de l'approche

Archimède commence par montrer que le problème se ramène à celui de la stabilité d'un triangle AOB rectangle en O ; la pente du talus est représentée par le côté AB . Si le talus est instable, c'est qu'un effondrement affecte le côté AB : les deux autres côtés sont structurellement stables.

L'idée fondamentale d'Archimède repose sur la considération suivante : si le triangle AOB est stable, alors tout triangle semblable à celui-là, fait du même matériau et ayant la même orientation par rapport à la verticale, doit être stable également.

La stabilité résulte d'une propriété du matériau, qu'Archimède appelle "cohésion" : si le matériau est liquide, cette cohésion est nulle et le talus s'effondre ; à l'inverse, si le matériau est fait de pierre, la cohésion est très grande et on peut construire des talus à pente verticale.

A l'évidence, cette cohésion dépend de la pression qui s'exerce sur le matériau : plus celui-ci est tassé et plus il résiste. Dans un premier temps, Archimède avait admis une dépendance linéaire $R_{cis} = \nu F_N$, où R_{cis} est la résistance au cisaillement (qui assure la cohésion), ν un coefficient sans dimension qui dépend du matériau et F_N la force de pression exercée sur le matériau. Mais la physique moderne tend à remplacer la formule linéaire ci-dessus par une dépendance affine :

$$R_{cis} = cl + \nu F_N,$$

où c s'appelle la cohésion effective du matériau, mesurée en N/m et l est la longueur de la bande susceptible de subir un cisaillement (en m). Cette formule possède plusieurs défauts, qui seront analysés en détail au Chapitre II ; néanmoins, elle est universellement acceptée dans la littérature et donc est la plus apte à servir à une présentation "grand public" de la stabilité des talus.

III. Résultats

Théorème (Archimède). – Une condition suffisante pour la stabilité d'une couche superficielle d'épaisseur ε est l'inégalité des forces (mesurées en Newton) :

$$\varepsilon L \delta g (\sin(\alpha) - \nu \cos(\alpha)) \leq \varepsilon p_0 \cos(\alpha) + cL$$

où l'on note :

L : largeur du talus à la base

α : angle du talus avec l'horizontale

ν : coefficient de cohésion du matériau (nombre sans dimension)

p_0 : pression maximale que peut supporter le matériau sans se déformer (en N/m : force par unité de longueur)

c : cohésion effective du matériau, en N/m

δ : densité du matériau (en kg/m^3 : on raisonne en 2d)

g : accélération de la pesanteur (en N/kg)

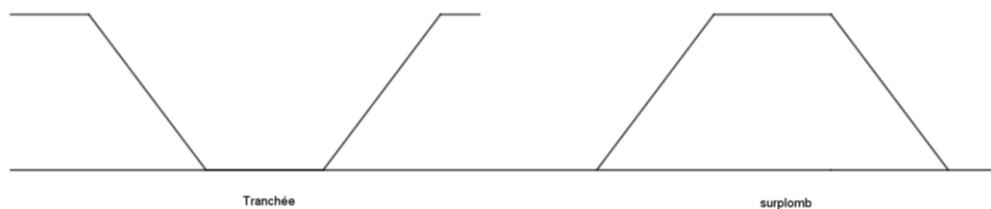
Démonstration du théorème

Par commodité, elle est divisée en plusieurs étapes.

1. Présentation du problème

Comme il le fait habituellement, Archimède commence par bien poser le problème. Il n'a pas lu les travaux de Charles-Augustin Coulomb (AD 1736 -1806).

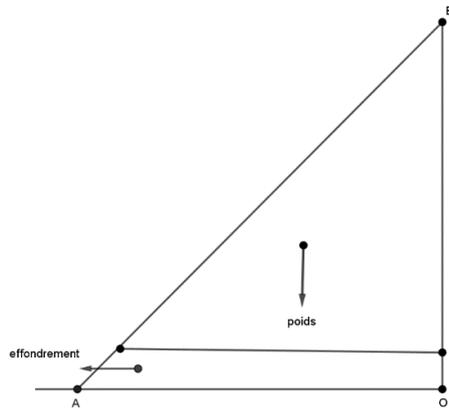
La question est celle de la stabilité d'un talus, soit pour une tranchée (fig. 1), soit pour un surplomb :



Le talus est supposé constitué d'un matériau homogène. La question porte sur l'angle (noté ici α) que fait la pente du talus avec l'horizontale. Plus cet angle est faible (voisin de 0), plus le talus est réputé stable ; à l'inverse, si l'angle est voisin de $\pi/2$ (pente verticale), le talus sera instable, c'est-à-dire sujet à effondrement.

Archimède observe que le matériau n'est pas liquide (sans quoi le talus s'effondrerait immédiatement), pas même un liquide visqueux. Il n'est pas non plus solide (fait de briques indéformables), car alors le problème de la stabilité ne se poserait pas. Un mur vertical fait avec une couche de briquettes indéformables est parfaitement stable (sous l'effet de son propre poids ; l'action du vent n'est pas prise en compte ici).

D'où peut provenir l'effondrement ? Manifestement, c'est le poids des couches supérieures, agissant sur la forme des couches inférieures. Les couches inférieures ne sont pas indéformables. Sous l'effet de la pression (poids des couches supérieures), elles s'aplatissent (réduction de la hauteur) et se dilatent (augmentation de la largeur).



effondrement sous l'effet du poids des couches supérieures

Tout aussi clairement, c'est la couche inférieure (la plus proche du sol) qui est la plus fragile, puisque c'est là que le poids au-dessus est le plus important. Puisqu'on veut assurer la stabilité du talus, il suffit donc de s'intéresser à cette couche.

Qu'est-ce qui limite, ou empêche, cet effondrement ? Manifestement, c'est le frottement (capacité à résister au cisaillement), soit avec la couche au-dessus, soit avec la couche au-dessous, soit sur les côtés.

2. Notion de frottement

Si on pose un solide (par exemple une brique) sur une planche horizontale, le solide ne bouge pas, même s'il est soumis à une petite force latérale.



objet soumis à une force latérale

Si la force augmente, vient une limite où l'objet se met en mouvement et, à partir de là, l'effet des frottements diminue beaucoup.

Il est donc légitime de considérer que, tant que la force extérieure est inférieure à une certaine limite, le support exerce une force (résistance par frottement), parallèle au plan, en sens contraire de la force extérieure, et égale à celle-ci en module. Cette force de frottement dépend bien entendu :

- du poids de l'objet, en contact avec le support ;
- des propriétés physiques de l'objet et du support. Par exemple, en présence d'huile, le glissement se produira avec une force extérieure très faible.

La déformation latérale d'un objet ne se produira donc que si le poids qui pèse sur cet objet dépasse une certaine limite ; en deçà de ce poids, l'objet ne se déforme pas.

Approche quantitative : l'adhérence est une force à la fois proportionnelle à la pression normale et à l'aire de la surface de contact. Exprimée en fonction de la force normale, elle est donc indépendante de l'aire.

3. Raisonnement plan

Archimède se demande s'il est légitime de raisonner en 2d, ou bien s'il faut adopter une géométrie 3d. La tranchée est invariante par translation. Si on considère une tranche verticale d'épaisseur λ , le poids des différentes couches est proportionnel à λ et la surface des couches est aussi proportionnelle à λ . Il en résulte que l'on peut supposer l'épaisseur comme infinitésimale, ce qui veut dire que l'on peut raisonner en 2d.

On peut aussi considérer qu'on regarde une "tranche de talus", délimitée par deux coupes verticales, séparées d'un mètre.

4. Analyse préliminaire

Le talus est supposé constitué d'un matériau homogène. La question porte sur l'angle (noté ici α) que fait la pente du talus avec l'horizontale. Plus cet angle est faible (voisin de 0), plus le talus est réputé stable ; à l'inverse, si l'angle est voisin de $\pi/2$ (pente verticale), le talus sera instable, c'est-à-dire sujet à effondrement.

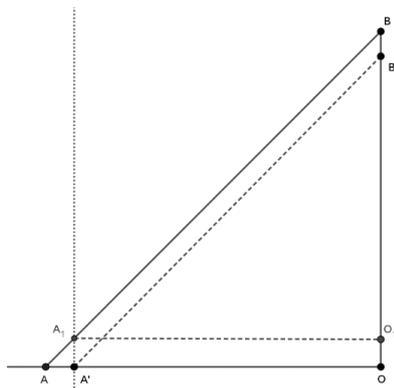
On s'intéresse à la stabilité de l'ensemble. On note α l'angle du talus avec l'horizontale, H la hauteur totale du talus ($H = OB$) et L largeur du talus à la base ($L = OA$). On a :

$$L = OA = \frac{H}{\tan(\alpha)}.$$

Lemme 1. – La stabilité du triangle OAB , pour un angle α donné, est invariante par homothétie de centre O et de rapport λ , $0 < \lambda < 1$.

Démonstration du Lemme 1

La stabilité du talus se traduit par celle du point A , puisque c'est lui qui est soumis aux plus fortes contraintes : le poids total du talus s'exerce sur le segment de base OA , et, si celui-ci est comprimé, il chasse A vers la gauche ; les frottements du segment OA sur la couche inférieure limitent le déplacement.



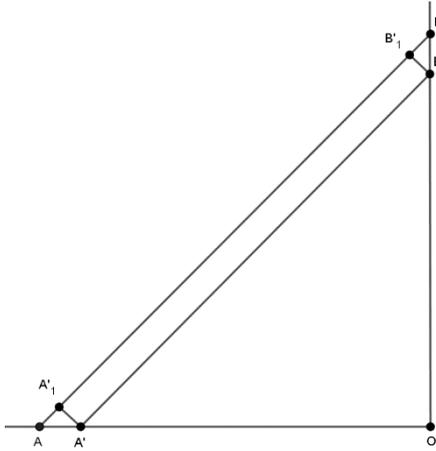
Si on fait une homothétie de rapport λ , $0 < \lambda < 1$, le segment AB est remplacé par un segment $A'B'$ parallèle à celui-ci, et à l'intérieur du triangle.

Introduisons le segment A_1O_1 , parallèle à AO , obtenu en déplaçant le triangle $A'O_1B'$ vers le haut ; lorsque B' vient

en B , A' vient en A_1 et O vient en O_1 (voir figure ci-dessus). Les triangles $A'OB'$ et A_1O_1B sont donc égaux.

Si le triangle OAB est stable, a fortiori le point A_1 ne bouge pas, et le triangle O_1A_1B est stable ; or ce triangle est égal à $OA'B'$; ceci prouve le Lemme.

Il résulte du lemme que le segment $A'B'$ est inerte : il n'est soumis à aucune pression vers l'extérieur. La stabilité du triangle complet AOB se réduit donc à la stabilité du trapèze $AA'B'B$, ce que nous appelons "couche superficielle".



Nous notons A'_1 la projection orthogonale de A' sur AB ; le triangle AA'_1A' est donc rectangle en A'_1 . L'instabilité du trapèze complet $AA'B'B$ se manifeste par le fait que le triangle AA'_1A' est soumis à écrasement, du fait du poids du trapèze $T = A'_1A'B'B$. Nous faisons le bilan des forces qui s'exercent sur la ligne de séparation $A'B'$.

5. Notations

On note $L = OA$, $L' = OA'$, $H = OB$, $H' = OB'$ et $\lambda = \frac{L'}{L} = \frac{H'}{H}$. Les triangles OAB et $OA'B'$ sont semblables. On a :

$$\frac{H}{L} = \tan(\alpha) ; H \cos(\alpha) = L \sin(\alpha) ; AB = \sqrt{L^2 + H^2} = \frac{H}{\sin(\alpha)} = \frac{L}{\cos(\alpha)} ;$$

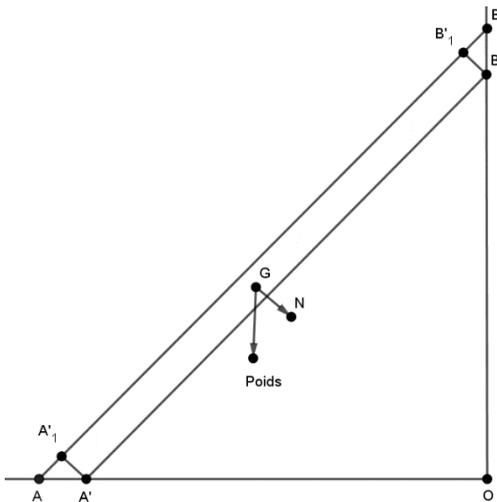
$$A'B' = \frac{\lambda H}{\sin(\alpha)} = \frac{\lambda L}{\cos(\alpha)} ;$$

On note $\varepsilon = A'A'_1$ l'épaisseur de la couche susceptible d'être instable. On a :

$$AA' = \frac{\varepsilon}{\sin(\alpha)} ; AA'_1 = \frac{\varepsilon}{\tan(\alpha)} ; BB' = \frac{\varepsilon}{\cos(\alpha)} ; B'B'_1 = \varepsilon ; BB'_1 = \varepsilon \tan(\alpha).$$

L'équation $\varepsilon = A'A'_1 = (1 - \lambda)L \sin(\alpha)$, avec les valeurs du talus no 1 de la RATP, nous donne, si on prend $\varepsilon = 0.2$ m, $L = 18.6$ m, $\alpha = 0.63$ rd : $\lambda = 0.98$, donc très proche de 1, ce qui est très satisfaisant. Ceci sera discuté au Chapitre II.

6. Bilan des forces



On a une couche superficielle, limitée par $A'B'$, susceptible de glisser sur le triangle inférieur.

La force F_N est la composante du poids du trapèze $T = A'_1A'B'B'$, perpendiculaire à la pente du talus. Cette force appuie sur $A'B'$; elle donne naissance à une force qui s'oppose au cisaillement, notée R_{cis} (résistance au cisaillement) ; cette force est parallèle à $A'B'$ et dirigée vers le haut.

Le triangle supérieur BB'_1B' est négligeable (l'épaisseur de la tranche est faible : λ est proche de 1) ; donc on se limite au poids du rectangle $\text{Rect} = A'B'A'_1B'_1$.

L'aire du rectangle vaut :

$$S(\text{Rect}) = \varepsilon A'B' \approx \varepsilon AB = \frac{\varepsilon L}{\cos(\alpha)}.$$

Le poids vaut :

$$\text{Poids}(\text{Rect}) = S(\text{Rect}) \delta g \approx \frac{\varepsilon L \delta g}{\cos(\alpha)}.$$

et $F_N = \text{Poids}(\text{rectangle}) \times \cos(\alpha)$; donc :

$$F_N \approx \varepsilon L \delta g$$

La composante parallèle à la pente vaut :

$$F_p = \text{Poids}(\text{rectangle}) \times \sin(\alpha) \text{ et donc :}$$

$$F_p \approx \varepsilon L \delta g \tan(\alpha).$$

Pour la résistance au cisaillement, comme expliqué plus haut, nous prenons la formule moderne :

$$R_{cis} = cl + \nu F_N$$

où c est une constante qui dépend du matériau, appelée cohésion effective du matériau ; c'est une force exprimée en Newton par mètre ; l est la longueur du matériau exposé au cisaillement. Ici, $l = A'B' \approx AB = \frac{L}{\cos(\alpha)}$.

Comme nous le verrons au Chapitre II, cette formule ne peut être correcte pour des matériaux trop minces ; ici, nous prenons $\varepsilon = 0.2$ m, valeur compatible avec les mesures réalisées au moyen des boîtes de cisaillement.

Les quantités R_{cis} et F_N sont des forces, exprimées en Newton. Le nombre $\nu = \tan(\varphi')$ est une caractéristique du matériau ; l'angle φ' s'appelle angle de frottement interne. Le nombre ν est sans dimension.

7. Calculs de stabilité

Soit p_0 la pression maximale que peut supporter le matériau sans se déformer (si la pression dépasse cette valeur, le matériau se déforme). On n'aura pas de déformation si :

$$F_p - R_{cis} \leq \varepsilon p_0$$

où ε désigne l'épaisseur de la tranche : $\varepsilon = A'A_1'$.

On obtient donc la condition suffisante de stabilité :

$$\varepsilon L \delta g \tan(\alpha) - \left(\frac{cL}{\cos(\alpha)} + \nu \varepsilon L \delta g \right) \leq \varepsilon p_0$$

ce qui donne, après simplification :

$$\varepsilon L \delta g (\tan(\alpha) - \nu) \leq \varepsilon p_0 + \frac{cL}{\cos(\alpha)}$$

ou encore :

$$\varepsilon L \delta g (\sin(\alpha) - \nu \cos(\alpha)) \leq \varepsilon p_0 \cos(\alpha) + cL$$

Rappel des notations :

L : largeur du talus à la base

α : angle du talus avec l'horizontale

c : cohésion effective du matériau, en N/m

ν : coefficient de cohésion du matériau (nombre sans dimension)

p_0 : pression maximale que peut supporter le matériau sans se déformer (en N/m)

δ : densité du matériau (en kg / m^2 : on raisonne en 2d)

g : accélération de la pesanteur (en N / kg)

et le Théorème est démontré.

8. Calcul de p_0

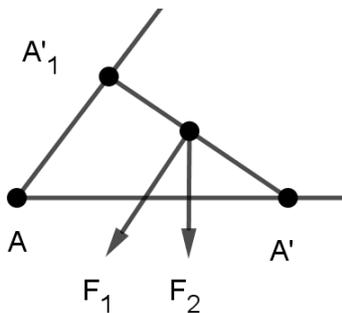
A priori, par définition, p_0 est la pression maximale que peut supporter le côté $A'A_1'$ sans déformation. Il n'existe pas, dans la littérature, d'estimation de cette quantité, surtout pour des situations où la longueur du côté est très petite.

Nous préférons donc à nouveau utiliser la méthode relative au cisaillement. Il ne s'agit donc plus, à proprement parler, d'une pression maximale sans déformation (qui, par définition, ne fait intervenir aucun angle ni aucune dimension, seulement la structure du matériau), mais d'une pression maximale avant éviction du triangle, qui dépendra des dimensions et de l'angle de talus.

Proposition 2 (Archimède). – La valeur de la pression limite est :

$$p_0 = \frac{c + v \frac{\delta g}{2} \frac{\varepsilon^2}{\tan(\alpha)}}{\varepsilon (\cos(\alpha) - v \sin(\alpha))}$$

Démonstration de la Proposition 2



Le côté $A'A_1'$ est soumis à une force, notée F_1 , qui vaut

$$F_1 = p_0 A'A_1' = p_0 \varepsilon.$$

La composante verticale de cette force, notée F_2 , vaut :

$$F_2 = F_1 \sin(\alpha) = p_0 \varepsilon \sin(\alpha)$$

Il faut y ajouter le poids du triangle, qui vaut :

$$Poids(AA'A_1') = \frac{1}{2} AA_1' \times A'A_1' \delta g = \frac{\varepsilon^2}{\tan(\alpha)} \frac{\delta g}{2}$$

Au total, la force verticale qui s'exerce sur la base du triangle vaut :

$$F_{vert} = p_0 \varepsilon \sin(\alpha) + \frac{\delta g}{2} \frac{\varepsilon^2}{\tan(\alpha)}$$

La résistance au cisaillement du triangle $AA'A_1'$ est une force horizontale, orientée vers la droite, qui vaut :

$$R'_{cis} = cAA' + \nu F_{vert} = \frac{c\varepsilon}{\sin(\alpha)} + \nu \left(p_0 \varepsilon \sin(\alpha) + \frac{\delta g}{2} \frac{\varepsilon^2}{\tan(\alpha)} \right)$$

Il y a stabilité si cette résistance est supérieure à la force qui chasse le triangle vers la gauche, à savoir la composante horizontale de F_1 , qui vaut :

$$F_{horiz} = F_1 \cos(\alpha) = p_0 \varepsilon \cos(\alpha)$$

On a donc la condition de stabilité du triangle :

$$R'_{cis} \geq F_{horiz}$$

qui se traduit par :

$$\frac{c\varepsilon}{\sin(\alpha)} + \nu \left(p_0 \varepsilon \sin(\alpha) + \frac{\delta g}{2} \frac{\varepsilon^2}{\tan(\alpha)} \right) \geq p_0 \varepsilon \cos(\alpha)$$

ou encore :

$$p_0 \varepsilon (\cos(\alpha) - \nu \sin(\alpha)) \leq \frac{c\varepsilon}{\sin(\alpha)} + \nu \frac{\delta g}{2} \frac{\varepsilon^2}{\tan(\alpha)}$$

$$p_0 (\cos(\alpha) - \nu \sin(\alpha)) \leq \frac{c}{\sin(\alpha)} + \nu \frac{\delta g}{2} \frac{\varepsilon \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$$

La valeur de la pression limite à retenir est donc :

$$p_0 = \frac{c + \nu \frac{\delta g \varepsilon \cos(\alpha)}{2}}{(\cos(\alpha) - \nu \sin(\alpha)) \sin(\alpha)}$$

et la Proposition 2 est démontrée.

IV. Mise en œuvre pratique

On doit disposer des données suivantes :

L : largeur du talus à la base

α : angle du talus avec l'horizontale

c : cohésion effective du matériau, en N/m

ν : coefficient de cohésion du matériau (nombre sans dimension)

δ : densité du matériau (en kg/m^2 : on raisonne en 2d)

On commence par calculer p_0 par la formule :

$$p_0 = \frac{c + \nu \frac{\delta g \varepsilon \cos(\alpha)}{2}}{(\cos(\alpha) - \nu \sin(\alpha)) \sin(\alpha)}$$

où g est l'accélération de la pesanteur ($g = 9.81 \text{ N/kg}$) et $\varepsilon = 0.2 \text{ m}$.

On vérifie ensuite que :

$$\varepsilon L \delta g (\sin(\alpha) - \nu \cos(\alpha)) \leq \varepsilon p_0 \cos(\alpha) + cL$$

Si c'est bien le cas, on conclut à la stabilité du talus.

Remarque 1. – Si $\sin(\alpha) - \nu \cos(\alpha) < 0$, ce qui équivaut à $\tan(\alpha) < \tan(\varphi')$, l'angle du talus est inférieur à l'angle de frottement interne : la stabilité est assurée d'office, quelle que soit la valeur des autres paramètres.

Remarque 2. – On ne peut espérer avoir un résultat qui ne dépende que de l'angle α et soit indépendant des dimensions (ici la longueur L) : en effet, les lois de la physique ne sont pas invariantes par homothétie de rapport λ , très grand.

Chapitre II

Discussions méthodologiques

I. Analyse de la littérature disponible

Il existe une littérature très abondante, relative à la mécanique des sols. La question traitée en général concerne la forme de la rupture d'un talus : selon certains auteurs, l'éboulement est plan ; pour d'autres il prend la forme d'un cercle (cercle de Mohr). Il n'y a, sur ce sujet, ni consensus ni justification ; peu importe en vérité, car la question n'est pas celle qui préoccupe la RATP : elle concerne une démonstration de stabilité et non la forme que prendrait l'éboulement.

L'approche la plus communément admise pour démontrer la stabilité est en termes de "facteur de sécurité" ; une démonstration explicite est faite par Suez pour un talus particulier.

La conception même du matériau dont le talus est constitué ne fait pas l'unanimité. Certains auteurs considèrent que le talus est fait de petites unités, analogues à des coussins, déformables et de volume constant : si on appuie trop sur le coussin, il s'enfoncé et se déforme latéralement, d'où une poussée latérale sur les coussins voisins. D'autres auteurs considèrent que le talus est fait de briques indéformables ; la rupture provient d'un cisaillement entre briques. C'est cette seconde approche que nous avons retenue ici, faute d'informations quantitatives sur la première.

Certains auteurs tentent une approche en termes de physique fondamentale et cherchent à comprendre d'où provient la cohésion (force de Van der Waals, etc.). Ils n'y parviennent pas, parce que les forces à l'échelle atomique ou moléculaire sont trop complexes. Personne ne sait, par exemple, comment déduire la loi de la gravitation universelle à partir de lois d'attraction entre atomes. Voir à ce sujet Richard Feynman "La nature de la physique", page 34.

Il doit donc être particulièrement clair que la démonstration de stabilité demandée par la RATP ne peut reposer que sur des formules empiriques, appuyées par des expériences de laboratoire ou par des relevés de terrain. Ces formules empiriques devraient préciser les limites de validité, ce qui n'est pas le cas à l'heure actuelle.

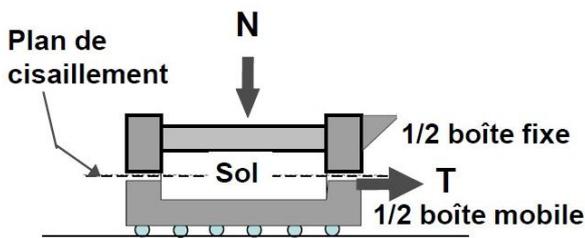
II. Approche expérimentale

1. Le cisaillement

Nous faisons référence au texte "Résistance au cisaillement des sols, essais en laboratoire", de Jean-Pierre Magnan :

http://www.pentes-tunnels.eu/didact/didactpenete2020/d_donnees/donneeslabo.pdf

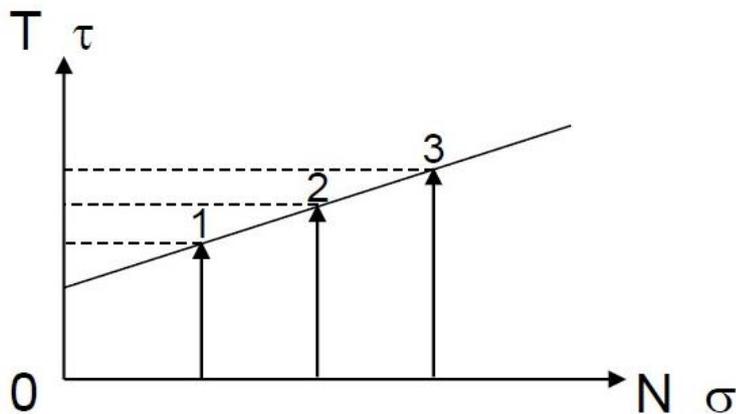
Les essais utilisent une boîte de cisaillement, encore appelé boîte de Casagrande :



La pression normale N sur la surface de rupture est appliquée par un piston. La boîte inférieure est mise en mouvement et on mesure T , force minimale pour que les deux demi-boîtes se désolidarisent.

Si la force est trop faible, le cisaillement ne se produit pas. La force minimale T est une fonction croissante de la pression normale N .

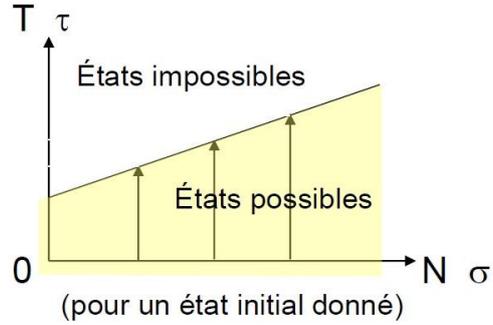
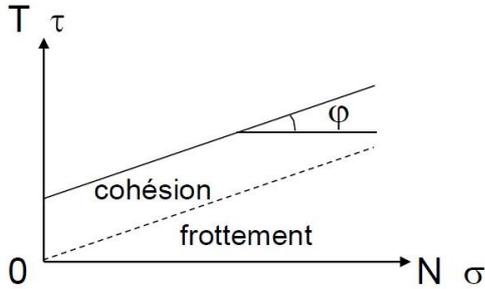
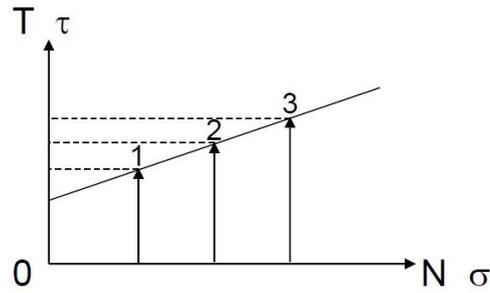
2. Présentation des résultats



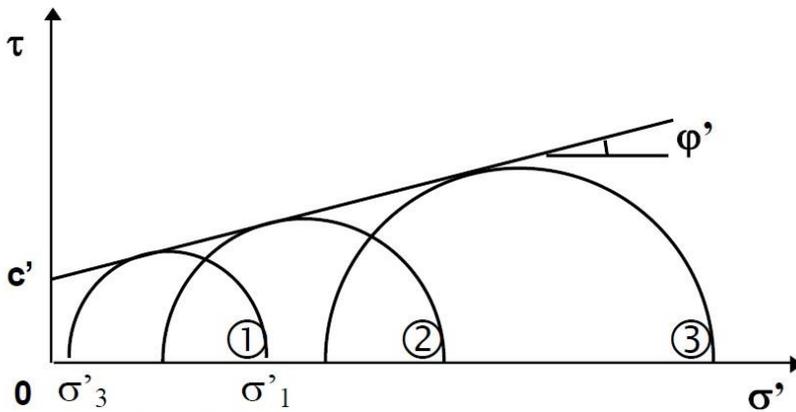
Le graphique de T en fonction de N a la forme approximative ci-dessus ; on peut faire intervenir la surface de contact, en posant $\sigma = \frac{N}{S}$ et $\tau = \frac{T}{S}$.

Voici une autre représentation :

Résultats bruts



La troisième figure représente les "états impossibles" : pour un poids N donné, il est impossible que la force T dépasse une valeur donnée. La droite limite s'appelle "droite intrinsèque", "critère de rupture", "droite de Mohr Coulomb" (en France).



Avec les notations de la figure ci-dessus, l'équation de la droite s'écrit :

$$\tau = c' + \sigma' \tan(\varphi')$$

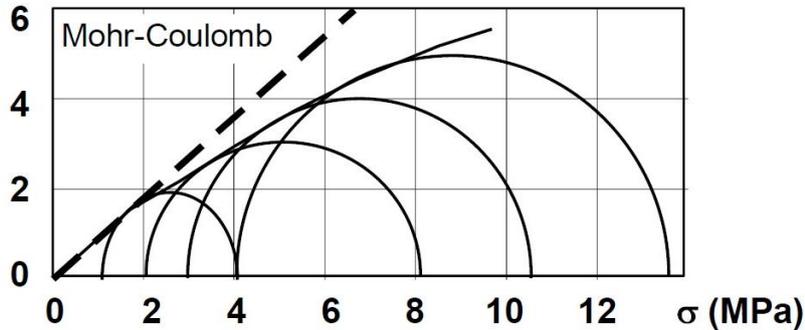
Nous avons noté $\nu = \tan(\varphi')$ et pris c au lieu de c' . En faisant intervenir les surfaces et les forces, la relation devient :

$$T = cS + \nu N$$

En 2d, la surface sera remplacée par une longueur ; avec les notations du premier chapitre, on a bien la formule :

$$R_{cis} = cl + \nu F_N \quad (1)$$

qui trouve ici sa justification. On appelle c la cohésion effective et φ' l'angle de frottement interne. L'auteur explique que, en réalité, la dépendance n'est pas linéaire :



Le critère de rupture pour les fortes contraintes a tendance à s'incurver.

Pour l'argile, l'angle φ' vaut à peu près 35° et $c = 15$ kPa. Pour le sable humide, $\varphi' \approx 38^\circ$ et $c \approx 10$ kPa. Pour le sable sec, $c = 0$. Il existe une abondante littérature sur ces valeurs, qui font à peu près consensus, du fait d'une utilisation très fréquente par les entreprises de BTP.

Voir en particulier :

<http://www.enig-civil.com/uploads/1/6/0/2/16021160/cisaillement.pdf>

III. Discussion à propos de la formule (1)

En mathématiques, pour être acceptable, une formule doit pouvoir passer un certain nombre de "stress tests" : passage à la limite, invariance selon certaines transformations, etc. Il est donc légitime de se poser la question ici. La réponse est largement négative, confirmant ce que nous avons écrit plus haut : la formule est empirique, et a un domaine de validité qui n'est pas convenablement spécifié. Les talus de la RATP étant heureusement des talus "ordinaires", on peut admettre que la formule s'applique convenablement. Elle a été testée, dans la littérature, sur des talus du même type.

1. Couche limite très mince

Que se passe-t-il si l'angle du talus s'approche de $\pi/2$ (talus très vertical) ? La composante F_N tend vers 0 ; on aurait donc : résistance au cisaillement $R_{cis} \approx c \cdot A'B'$, n'est pas nulle, ce qui est impossible : une fine couche de matériau, posée presque verticalement, va s'effondrer. La formule n'est certainement pas valable pour F_N faible ; du reste, dans la boîte de cisaillement, la couche de matériau ne peut être supposée proche de 0 : il y a au moins l'épaisseur de la boîte. C'est pourquoi, au chapitre I, nous avons pris pour épaisseur $\varepsilon = 0.2$ m, dimension compatible avec la boîte de cisaillement.

2. Invariance par homothétie

Le premier Lemme d'Archimède stipule l'invariance de la stabilité par homothétie de rapport $\lambda < 1$: si le talus est stable et que l'on "rabote" une couche parallèle à la pente, ce qui reste est stable aussi. On peut se poser la question : que se passe-t-il si tout est multiplié par λ , disons $\lambda = 100$?

On observe que la formule (1) n'est pas invariante par homothétie : le terme cl est multiplié par λ et le terme νF_N est multiplié par λ^2 . On peut faire les deux observations suivantes :

Si le matériau lui-même est modifié dans cette homothétie, en particulier si la taille des grains est elle-même multipliée par 100, on peut penser que le talus résultant aura la même propriété de stabilité que le talus de départ (en vérité, on n'en sait rien : on ne sait pas comment les lois de la physique sont modifiées par une telle transformation).

Si la transformation consiste à rajouter des couches parallèles, sur le talus de départ, avec le même matériau, on peut regarder comment les calculs du chapitre I sont affectés :

On a :

$$p_0 \sim \frac{\nu \delta g \cos(\alpha)}{2(\cos(\alpha) - \nu \sin(\alpha)) \sin(\alpha)} \varepsilon$$

et donc p_0 est remplacé par λp_0 .

Le terme $\varepsilon L \delta g (\sin(\alpha) - \nu \cos(\alpha))$ est multiplié par λ^2 , puisque ε et L sont multipliés par λ . Dans $\varepsilon p_0 \cos(\alpha) + cL$, le premier terme est multiplié par λ^2 et le second par λ seulement ; lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$, l'inégalité de stabilité sera satisfaite seulement si :

$$L \delta g (\tan(\alpha) - \nu) \leq p_0$$

ce qui revient encore une fois à faire $c = 0$. On en conclut que la formule "moderne" donnée en (1) ne possède pas la propriété d'invariance par homothétie, $\lambda > 1$, λ grand.

Dans son livre "La nature de la Physique", Richard Feynman insiste sur le fait que les lois de la physique ne sont pas invariantes par une homothétie quelconque : d'une part, on ne peut descendre au-dessous des constituants élémentaires (atomes, molécules) et, d'autre part, la gravitation est en $1/d^2$. Il donne cet exemple : un éléphant 100 fois plus gros ne peut exister.

Archimède sait cela, bien sûr : dans le chapitre I, il considère seulement des homothéties avec $\lambda < 1$ et λ proche de 1. Mais il y a une conséquence méthodologique intéressante : dans toute formule de stabilité, les dimensions du talus doivent intervenir, et pas seulement l'angle du talus.

3. Propriétés nécessaires de la formule de résistance au cisaillement

Nous l'avons vue sous la forme :

$$R_{cis} = cl + \nu F_N$$

Comme la force normale F_N provient du poids de la couche superficielle, poids qui est lui-même proportionnel à la surface, on peut écrire :

$$R_{cis} = c_1 l + c_2 \varepsilon l$$

où l est la longueur de la couche superficielle, ε son épaisseur, et c_1, c_2 des constantes qui dépendent du matériau.

Il est évident que R_{cis} dépend effectivement de la surface de contact (ici représentée par l) et il est légitime de considérer que la résistance est proportionnelle à la surface. Il est aussi évident que R_{cis} augmente avec le poids, donc avec ε , mais rien n'indique que cette dépendance soit nécessairement linéaire. Il serait facile de régler cette question : faisons deux mesures, dans la même boîte de cisaillement, avec un poids P puis avec le poids $2P$. On aura :

$$\rho_1 = cl + \nu P$$

$$\rho_2 = cl + 2\nu P$$

d'où l'on déduit :

$$\rho_2 - \rho_1 = \nu P$$

et donc $\nu = \frac{\rho_2 - \rho_1}{P}$; en reportant dans la première équation :

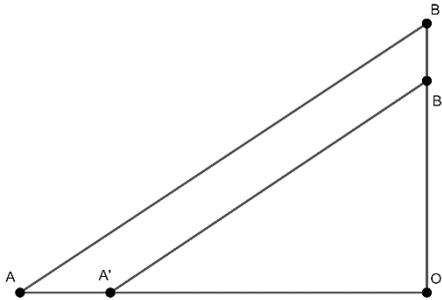
$$c = \frac{2\rho_1 - \rho_2}{l}.$$

Autrement dit, deux expériences avec la boîte de cisaillement permettent de calculer les coefficients c, ν . Si on reprend l'expérience avec des poids $3P, 4P, etc.$, on aura confirmation de la forme de la dépendance.

IV. Angle de talus naturel et résistance au cisaillement

L'angle de talus naturel est l'angle que fait la pente du tas de matière empilée non tassée et l'horizontale. Il est caractéristique du matériau en œuvre. Il contribue à la description du comportement mécanique des sols et des matériaux granulaires ou pulvérulents.

Wikipédia : https://fr.wikipedia.org/wiki/Angle_de_talus_naturel



Il existe une relation simple (qui apparemment n'apparaît nulle part dans la littérature moderne) entre cet angle et la résistance au cisaillement. L'approche d'Archimède permet de l'obtenir facilement.

Supposons que le talus AOB soit naturellement stable. Alors le trapèze $AA'B'B$ est aussi stable. Le poids de ce trapèze vaut à peu près (calculs précédents) :

$$Poids(\text{Rect}) = S(\text{Rect}) \delta g \approx \frac{\varepsilon L \delta g}{\cos(\alpha)}$$

et la composante normale à la pente vaut

$$F_N = Poids(\text{rectangle}) \times \cos(\alpha) \approx \varepsilon L \delta g$$

La composante parallèle à la pente vaut :

$$F_p = Poids(\text{rectangle}) \times \sin(\alpha) \approx \varepsilon L \delta g \tan(\alpha)$$

La résistance au cisaillement vaut :

$$R_{cis} = \nu \varepsilon L \delta g$$

Puisque le rectangle est stable :

$$\nu \varepsilon L \delta g > \varepsilon L \delta g \tan(\alpha)$$

ou encore : $\nu \geq \tan(\alpha)$

ce qui est bien la formule que l'on trouve (établie de manière expérimentale) dans la littérature. Ici, elle est démontrée.

Chapitre IV

Critique des approches existantes

I. L'approche par "facteur de sécurité"

A. Présentation

Dans ce paragraphe, nous présentons la méthode la plus couramment employée pour démontrer la stabilité des talus : il s'agit de la méthode dite des "facteurs de sécurité". Elle est simple à comprendre et simple à mettre en œuvre. Malheureusement,

- Mathématiquement parlant, elle est fondamentalement incorrecte ;
- Elle ne permet pas de conclure à la stabilité des talus de la RATP.

Nous la présentons ici par souci de référence bibliographique, mais nous en déconseillons l'utilisation, tant dans le sens positif (le talus est réputé stable) que dans le sens négatif (le talus est réputé instable).

B. Introduction

L'analyse de la stabilité des pentes s'effectue habituellement à la rupture à l'aide de la "méthode des tranches", qui consiste à découper le sol, susceptible de mouvement, en tranches verticales, voir [Faure].

Cette méthode donne, par l'intermédiaire du coefficient de sécurité, une idée de l'état d'équilibre de la pente étudiée : est-elle stable, ou bien proche de l'équilibre limite ?

Dans son cours à l'ENTPE, R. M. Faure insiste sur le fait que l'expression du coefficient de sécurité est différente selon que l'on considère que la rupture est plane, circulaire ou quelconque. Ce sont des hypothèses académiques : en réalité, on ne sait pas d'avance quel type de rupture va se produire.

C. Définition du coefficient de sécurité

L'analyse de la stabilité des talus est généralement exprimée en fonction du coefficient de sécurité, tenant compte de la résistance du sol au cisaillement. Il est défini par :

$$F_s = \frac{C}{C'} = \frac{\tan(\varphi)}{\tan(\varphi')}$$

où :

C est la cohésion du sol : propriété qui permet aux particules d'un corps de rester associées les unes aux autres ;

C' est la cohésion mobilisée : force qui lie les particules du sol entre elles au moment du glissement.

φ est l'angle de frottement du sol : l'angle que fait la pente du tas de matière empilée non tassée et l'horizontale. Il est caractéristique du matériau en œuvre et contribue à la description du comportement mécanique d'un sol.

φ' est l'angle de frottement mobilisé : angle limite du talus pour l'effondrement.

F_s est donc défini comme le coefficient par lequel les paramètres de résistance au cisaillement du sol devraient être divisés pour obtenir l'état de glissement. Voir [Karal], [Donald et Chen].

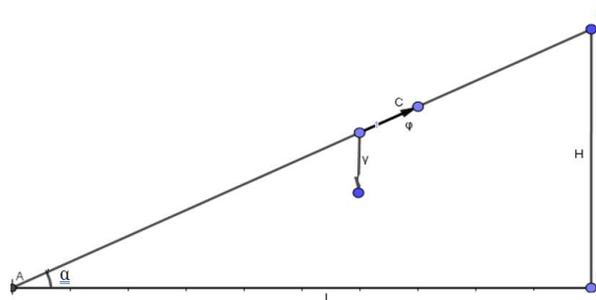
D. Décomposition des forces :

Soit une pente d'inclinaison α dans un sol dont les caractéristiques sont :

- γ : Poids volumique de la tranche étudiée, en Newton par mètre cube (attention, ici γ ne désigne pas une accélération, mais la notation est traditionnelle dans ce contexte) ;
- C : Cohésion le long du plan de glissement ;
- φ : Angle de frottement interne le long du plan de glissement ;
- H : hauteur du talus.

Le coefficient de sécurité global de la rupture le long du plan situé à la profondeur H est donné par la formule :

$$F_s = \frac{C + \gamma H \cos^2(\alpha) \tan(\varphi)}{\gamma H \cos(\alpha) \sin(\alpha)} = \frac{C}{\gamma H \cos(\alpha) \sin(\alpha)} + \frac{\tan(\varphi)}{\tan(\alpha)}$$



En milieu homogène, si $C > 0$, F_s diminue lorsque H augmente. On s'attend donc à ce que la surface de rupture intervienne à la plus grande profondeur possible. Ceci est cohérent avec l'approche d'Archimède.

Si le sol est non cohésif ($C = 0$), ce qui est le cas pour le sable, la formule s'écrit sous forme simplifiée :

$$F_s = \frac{\tan(\varphi)}{\tan(\alpha)}$$

Le talus est dit stable si seulement si $F_s > 1$; il présente une sécurité limite pour $F_s = 1$.

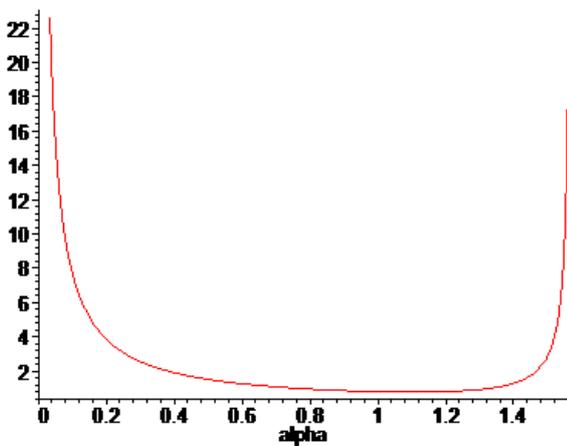
Notons que ceci débouche sur une évidence : $F_s > 1$ si et seulement si $\alpha < \varphi$.

E. Une formule incorrecte

Mathématiquement parlant, la formule ci-dessus ne peut pas être correcte :

$$F_s = \frac{C + \gamma H \cos^2(\alpha) \tan(\varphi)}{\gamma H \cos(\alpha) \sin(\alpha)} = 2 \frac{C + \gamma H \cos^2(\alpha) \tan(\varphi)}{\gamma H \sin(2\alpha)}$$

Si $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$, le dénominateur tend vers 0 ; si $C > 0$, le numérateur tend vers $2C$. Autrement dit, dès que le sol présente une cohésion non nulle (tous matériaux, sauf sable sec), le facteur de sécurité devient > 1 dès que la pente est suffisamment verticale ! Ceci est absurde, bien entendu.



Voici le graphe de $F_s(\alpha)$, $\alpha = 0, \dots, \frac{\pi}{2}$, dans la situation où $C = 15$ kPa, $\gamma = 19000$ N/m^3 , $H = 4$ m.

Le facteur de sécurité commence par diminuer, ce qui est logique, mais augmente brutalement à partir de $\alpha \approx 1.1$ rad $\approx 57^\circ$ et tend vers $+\infty$ lorsque $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$.

Références

1. Sur Archimède

Archimède, Editions "Les Belles Lettres", Texte établi et traduit par Ch. Mugler :

- Œuvres. Tome I: De la sphère et du cylindre - La Mesure du cercle - Sur les conoïdes et les sphéroïdes
- Œuvres. Tome II : Des spirales - De l'équilibre des figures planes - L'Arénaire - La Quadrature de la parabole
- Œuvres. Tome III : Des corps flottants - Stomachion - La Méthode - Le livre des lemmes - Le Problème des bœufs
- Œuvres. Tome IV : Commentaires d'Eutocius – Fragments

[AMW] Bernard Beauzamy : Archimedes' Modern Works, SCM SA, ISBN 978-2-9521458-7-9, ISSN 1767-1175, relié, 224 pages. Août 2012.

Wikipedia : Archimède - <https://fr.wikipedia.org/wiki/Archimède>

2. Physique Générale

Richard Feynman : La Nature de la Physique, 1965

3. Références historiques

André Martinet : Cours de chemins de fer professé à l'Ecole nationale des ponts et chaussées : 1er fascicule, Construction, voie, exploitation technique, 1928. Source gallica.bnf.fr

J. KERISEL : HISTORIQUE DE LA MECANIQUE DES SOLS EN France JUSQU'AU 20^{ème} siècle. UCLA EMS Serials. ICE Publishing Ltd, 1956.

J. L. Bordes : Regard sur le passé de la géotechnique, 2000

<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/pdf/2000/02/geotech2000091p13.pdf>

Charles-Augustin Coulomb : Sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture. Mémoires maths et physique académie royale 1778.

4. Cours théoriques

R.M. Faure : Méthodes de calcul en stabilité des pentes, cours de l'ENTPE

http://www.pentes-tunnels.eu/enseignement/cours_RMF_2A/ac1_calcul_stabilité_pentes.pdf

Durville Jean-Louis et Séve Gilles : Stabilité des pentes, Glissement en terrain meuble - L.P.C Technique de l'ingénieur 1988.

Luc Sibille. Bases de la Géotechnique Module MXG4 IUT Génie Civil et Construction Durable, 2018.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01784530v1>

Luc Sibille. Géotechnique pour le technicien IUT Génie Civil et Construction Durable Module MXG5, 2018.

<https://hal.archives-ouvertes.fr/cel-01784592>

Ecole Nationale d'Ingénieurs de Gabès, département de génie civil : Résistance au cisaillement des sols

<http://www.enig-civil.com/uploads/1/6/0/2/16021160/cisaillement.pdf>

Université de Chlef : Cours de stabilité des talus

<https://www.univ-chlef.dz/FGCA/wp-content/uploads/2019/06/cours-STABILITE-DES-TALUS-barrage-en-terre.pdf>

Andrew Schofield and Peter Wroth: Critical State Soil Mechanics

Lecturers in Engineering at Cambridge University, 1968

http://www-civ.eng.cam.ac.uk/geotech_new/publications/schofield_wroth_1968.pdf

Stabilité des talus : versants naturels

<https://www.yumpu.com/fr/document/read/17041250/stabilite-des-talus-1-versants-naturels>

Jacques Lérau : INSA Toulouse, 3 ème année Ingénierie de la Construction, GÉOTECHNIQUE 1

https://moodle.insa-toulouse.fr/file.php/301/content/jlerau/chapitre_3.pdf

Jacques Beauchamp, Université de Picardie : MECANIQUE DES ROCHES ET DES SOLS

<https://www.u-picardie.fr/beauchamp/eadaa/mecasol.htm>

5. Publications

Karal K. Energy method for soil stability analyses, Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE 1977.

Donald IB, Chen Z. Slope stability analysis by the upper bound approach: fundamentals and methods, Canadian Geotechnical Journal 1997.

Delphine JACQUELINE : Caractérisation de la compacité du ballast ferroviaire par méthodes sismiques, Thèse soutenue le 17 décembre 2015

https://jtav.ifsttar.fr/fileadmin/contributeurs/JTAV/2016/D_Jacqueline.pdf

V. Whenham, ir., chef de projet, laboratoire 'Géotechnique et monitoring', CSTC

P. Ganne, dr. ir., chef de projet, laboratoire 'Géotechnique et monitoring', CSTC

M. De Vos, ir., chef adjoint de la division 'Géotechnique', CSTC

Cohésion apparente des sols non saturés

https://www.challenge-agriculture.fr/wp-content/uploads/2017/05/Cohesion_apparente_des_sols_non_satures.pdf

Mohammad Mehedi Hasan & Md. Abdur Rashid : Determination of friction angle of soil using double-punch test approach: An experimental study Cogent Engineering, 4:1, 1419415

<https://doi.org/10.1080/23311916.2017.1419415>

Jean-Louis Durville : Note sur les calculs de stabilité des talus avec surface de rupture polygonale. Rev. Fr. Geotech. 2016, 148, 3

https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/full_html/2016/03/geotech160018/geotech160018.html

H. JOSSEAUME Propriétés mécaniques de l'argile des Flandres à Dunkerque et à Calais, 1998

<https://www.geotechnique-journal.org/articles/geotech/pdf/1998/03/geotech1998084p3.pdf>

6. Documents techniques

Leroueil S. Magnan J.P., Tavenas F- Remblais sur argile molle -Technique et documentation Lavoisier, Paris 1985

Gilles Causse : Approche cinématique de la stabilité d'un talus. Communication personnelle

Mohamed Baheddi : Les glissements de terrain ; stabilité des pentes et des talus

http://staff.univ-batna2.dz/sites/default/files/baheddi-mohamed/files/chapitre_3_les_glissement_de_terrain.pdf

Zied Benghazi : Poussée et butée

https://zied-benghazi.weebly.com/uploads/2/4/5/8/24585230/chapitre_i_-_pousse_et_bute.pdf

Geo5 Aide contextuelle Cohésion du sol

<https://www.finesoftware.fr/aide-contextuelle/geo5/fr/cohesion-du-sol-01/>

J.P. Magnan : Description, identification et classification des sols : Résistance au cisaillement des sols, essais en laboratoire, 1997.

SUEZ RV CENTRE EST, ISDND DE SATOLAS ET BONCE (38)

PROJET D'EXTENSION SATOLAS 3-REHAUSSE

ETUDE DE LA STABILITE GEOTECHNIQUE, 2017

<https://www.isere.gouv.fr/content/download/37223/269341/file/A8%20Etude%20de%20la%20stabilite%20geotechnique.pdf>

BRGM : Géotechnique appliquée à la sécurité des exploitations à ciel ouvert en terrains alluvionnaires, 1993

<http://infoterre.brgm.fr/rapports/RR-36818-FR.pdf>