La forme de la chaînette : inefficacité de nos mathématiques

Bernard Beauzamy

Newsletter "les mathématiques du réel", article no 2, février 2024

On appelle "chaînette" un fil pesant, suspendu à ses deux extrémités, supposées pour simplifier à la même altitude. On en trouve en particulier autour des monuments : photo ci-contre. On peut aussi penser aux lignes à haute tension entre deux pylônes.

La question est : quelle est la forme de la chaînette ?

Les mathématiciens ont longtemps cru qu'il s'agissait d'une parabole ; c'est Leibniz (1691) qui a montré que ce n'était pas le cas et a donné une forme générale pour l'équation. Sa solution, à base d'équations différentielles, est purement analytique et n'est pas complètement satisfaisante : elle donne la forme générale, mais sans solution explicite lorsqu'on se donne les deux paramètres de définition : la distance entre les deux points d'accroche et la longueur totale de la chaînette.

Utilisant l'approche d'Archimède par discrétisation, nous remplaçons la chaînette pesante par un grand nombre de petites boules équidistantes. Cela nous permet de montrer que la forme de la chaînette est entièrement déterminée par l'angle qu'elle forme avec l'horizontale en haut à gauche.

Notre solution reste complexe et peu satisfaisante. La Nature détermine sans difficulté la forme de la chaînette (elle la laisse pendouiller). La chaînette est un objet naturel très simple ; on constate une fois de plus que nos mathématiques ont des difficultés à en décrire correctement le résultat. Les démonstrations sont lourdes et complexes et les résultats peu commodes à utiliser.

Le responsable de la recherche d'un groupe industriel spécialiste de la vision faisait un jour observer ceci : un joueur de tennis parvient à rattraper la balle, même quand celle-ci arrive de face et dans des conditions d'éclairement peu favorables ; son cerveau ne résout pas un système d'équations aux dérivées partielles.

Dans le présent article, nous rappelons la démonstration de Leibniz. Puis, utilisant la méthode de discrétisation d'Archimède, nous remplaçons la chaînette continue par une succession de petites boules équidistantes ; cela nous permet de montrer que la forme de la chaînette est entièrement déterminée par l'angle en haut à gauche. Si on note δ la distance entre deux points d'ancrage et l la longueur totale de la chaînette, cet angle satisfait à l'équation :

$$\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\ln\left(\frac{\sin(\alpha)+1}{\cos(\alpha)}\right)=\frac{\delta}{l}$$

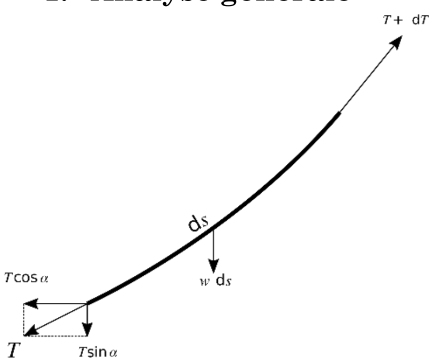
Il en résulte en particulier que, si on veut un quotient $\frac{\delta}{l}\le 0.88$ (chaînette assez longue), il faudra un angle initial d'au moins $\frac{\pi}{4}$. Si on veut $l=2\delta$, l'angle doit faire environ $1.34\,rd\approx 57°$.

I. La solution de Leibniz

Voir en particulier la présentation de Olivier Keller :

http://www.bibnum.education.fr/sites/default/files/leibniz-analyse-25.pdf

1. Analyse générale



Notons s l'abscisse curviligne. La chaînette est soumise à son seul poids ; elle est inextensible. Soit ds un élément de longueur sur la chaînette ; il est soumis à son poids $w\,ds$ (w est la densité du fil) et à deux tensions, une à chaque bout. Notons $T(s)$ la tension à l'abscisse s ; elle est dans le prolongement de l'élément de longueur. La composante verticale est $T\sin(\alpha)$ et la composante horizontale est $T\cos(\alpha)$, où α est l'angle de T avec l'horizontale. La composante horizontale est constante, puisque le poids est vertical. Ceci s'écrit :

$T\cos(\alpha)=T_H$ (1) constante en tout point de la courbe.

Sur l'axe vertical, on a : $d\left(T\sin(\alpha)\right)=w\,ds$, ce qui donne par intégration :

$$T\sin(\alpha)=w(s-s_0) \qquad (2)$$

On a $\alpha=0$ au point le plus bas de la courbe (tangente horizontale), et s_0 correspond à cette position. Il résulte de (1) et (2) :

$$T^2=T_H^2+w^2\left(s-s_0\right)^2 \qquad (3)$$

qui donne en tout point la tension en fonction de l'abscisse curviligne :

$$T(s)=\sqrt{T_H^2+w^2(s-s_0)^2}$$

La tension est minimale au point le plus bas ; elle est maximale aux extrémités de la courbe.

En calculant le quotient (2)/(1), on obtient :

$$p=\tan(\alpha)=\frac{w(s-s_0)}{T_H} \qquad (4)$$

où p désigne la pente de la courbe, $p=\dfrac{dy}{dx}$. On pose $a=\dfrac{T_H}{w}$. On obtient :

$$p=\frac{s-s_0}{a}$$
$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\frac{ds}{dx} \qquad (5)$$

Or $(\mathrm{d}s)^2=(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2$ et donc : $\left(\dfrac{\mathrm{d}s}{dx}\right)^2=1+\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{dx}\right)^2=1+p^2$

En reportant dans (5), on obtient :

$$\frac{dp}{dx}=\frac{1}{a}\sqrt{1+p^2}\,,\ \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}}=\frac{1}{a}dx,\ \operatorname{arcsin}h(p)=\frac{1}{a}(x-x_0),\ p=\sinh\left(\frac{1}{a}(x-x_0)\right) \qquad (6)$$

$\dfrac{dy}{dx}=\sinh\left(\dfrac{1}{a}(x-x_0)\right)$ et en intégrant par rapport à x :

$$y-y_0=a\cosh\left(\frac{1}{a}(x-x_0)\right) \qquad (7)$$

avec $\cosh(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right)$. En utilisant (4) et (6) :

$$\sinh\left(\frac{1}{a}(x-x_0)\right)=\frac{1}{a}(s-s_0)\,,\ s-s_0=a\sinh\left(\frac{1}{a}(x-x_0)\right) \quad (8)$$

Comme la composante verticale de la tension est $T_V=T\sin(\alpha)=w(s-s_0)$ d'après (2), on obtient : $T_V=T_H\sinh\left(\dfrac{1}{a}(x-x_0)\right)$. D'où la tension, d'après (3) :

$$T=\sqrt{T_H^2+w^2\left(s-s_0\right)^2}=\sqrt{T_H^2+w^2\left(\frac{T_H}{w}\sinh\left(\frac{w}{T_H}\left(x-x_0\right)\right)\right)^2}$$

$$=T_H\sqrt{1+\sinh^2\left(\frac{w}{T_H}\left(x-x_0\right)\right)}=T_H\cosh\left(\frac{w}{T_H}\left(x-x_0\right)\right)$$

$T=T_H\cosh\left(\frac{1}{a}\left(x-x_0\right)\right)$ qui donne la tension en coordonnées cartésiennes. On observe que ces équations font intervenir T_H, qui n'est pas connu.

2. Chaînette symétrique

Supposons maintenant la chaînette fixée à deux clous de même altitude ; on prendra l'axe des x passant par ces deux clous, avec l'origine le milieu des deux clous ; soit δ la distance entre les clous et soit l la longueur totale de la chaînette. On reprend l'équation (7) :

$$y-y_0=a\cosh\left(\frac{1}{a}\left(x-x_0\right)\right)$$

Le minimum du cosh est obtenu en 0 et ce minimum vaut 1. Il en résulte que l'on prendra $x_0=0,$ les deux clous étant symétriquement définis par $C_1=\begin{pmatrix}-\delta/2\\0\end{pmatrix}, C_2=\begin{pmatrix}\delta/2\\0\end{pmatrix}.$

Si $x=\delta/2$, $y=0$, d'où l'équation cartésienne :

$$y=a\cosh\left(\frac{x}{a}\right)-a\cosh\left(\frac{\delta}{2a}\right)$$

Le minimum de y, obtenu pour $x=0,$ est :

$$y_{\min}=a-a\cosh\left(\frac{\delta}{2a}\right)$$

La tension en tout point x est :

$$T=T_H\cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

C'est bien sûr une fonction paire. On a vu que s_0 correspondait au point le plus bas de la courbe, donc à une longueur égale à la moitié de la longueur totale de la chaînette : $s_0=\frac{l}{2}.$

La longueur de la courbe est : $s-\frac{l}{2}=a\sinh\left(\frac{x}{a}\right)$

La chaînette est ici décrite de la gauche vers la droite (x croissant). Si $x=\frac{\delta}{2}$, on a $s=l$ et donc : $l-\frac{l}{2}=a\sinh\left(\frac{\delta}{2a}\right)$

d'où la relation : $l=2a\sinh\left(\frac{\delta}{2a}\right)$

$y_0=a\cosh\frac{x_0}{a}=a+h$

La flèche h est la hauteur entre les deux points d'accroche et le point le plus bas de la chaînette, ici $h=-y_{\min}$.

Proposition.- *Pour une chaînette de longueur l et de flèche h alors :*

$$a=\frac{l^2-4h^2}{8h}$$

Démonstration. - Soient $\left(\pm\frac{\delta}{2},0\right)$ les coordonnées des points d'accroche. On a :

$l=2a\sinh\left(\frac{\delta}{2a}\right)$

$h=a\cosh\left(\frac{\delta}{2a}\right)-a$

d'où la Proposition.

Mais cette proposition utilise la valeur de h, qui a priori n'est pas connue. Seuls sont connus δ (espacement des accroches) et l (longueur de la chaînette). La relation $l=2a\sinh\left(\frac{\delta}{2a}\right)$ permet de calculer $a=\frac{T_H}{w}$, mais de manière non explicite. On note que a est indépendant du poids et ne dépend que de la longueur de la chaînette et de la distance entre les clous d'accroche.

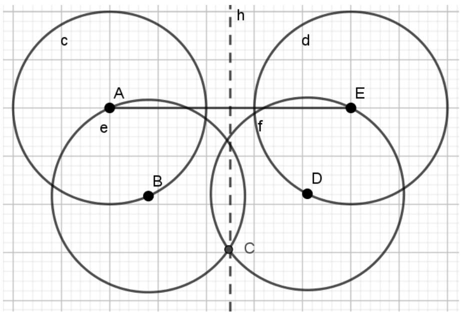
II. Résolution physique du problème

Selon la méthode d'Archimède, on discrétise la chaînette : on introduit N boules pesantes, équidistantes ; le fil qui les relie étant dépourvu de masse et étant non-extensible. Comme précédemment, on note l la longueur totale du fil et δ la distance entre les points de fixation, supposés à la même altitude.

On peut commencer par se demander quel problème la Nature résout en réalisant la forme de la chaînette. La réponse est : la Nature minimise l'énergie potentielle de l'ensemble des boules ; autrement dit, elle les met le plus bas possible, compte-tenu des liens entre boules.

1. Remarque préliminaire

Il faut tenir compte du poids de tous les points, sans quoi on obtient une disposition "en triangle".



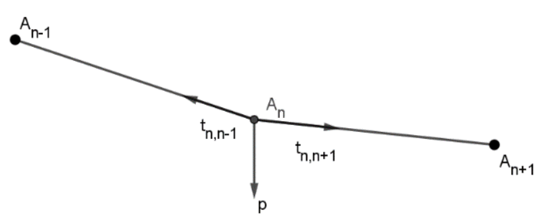
Voyons ceci sur un exemple simple : les points d'attache sont A et E et on dispose de trois boules, respectivement en $B, C, D.$ Compte-tenu des distances fixes entre boules, elles sont assujetties à se trouver sur des cercles, comme le montre la figure ci-contre. Le problème de minimisation revient à trouver deux cercles, l'un contenant A l'autre contenant E, de même rayon, dont l'intersection soit le plus bas possible.

Le point B décrit le cercle de centre A ; dans ce mouvement, le cercle de centre B génère un cercle, qui est de centre A et de rayon double. Le point cherché C sera donc à distance $2r$ de A, et les points A, B, C sont alignés, ce qui ne correspond pas à la réalité physique. Le problème a été posé de manière incorrecte : le poids de tous les points doit intervenir ; le problème bien posé est la minimisation de $y_B + y_C + y_D$.

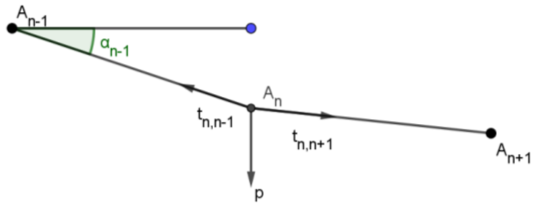
2. Approche en termes de forces

On considère seulement la partie gauche de la chaînette ; elle est discrétisée et N boules sont réparties à égale distance ; on note $A_n,\ n = 0, \dots, N,$ les points où se trouvent ces boules avec $A_0 = A,$ point d'attache à gauche et A_N situé sur le milieu de la chaînette.

Passage de A_{n+1} à A_n.



La tension $t_{n,n+1}$ est égale en module, opposée en direction, à $t_{n+1,n}$; elle a une composante horizontale, notée $h\left(t_{n,n+1}\right)$ et une composante verticale, notée $v\left(t_{n,n+1}\right)$.



Soit α_{n-1} l'angle du segment $A_{n-1}A_n$ avec l'horizontale et de même α_n l'angle du segment A_nA_{n+1} avec l'horizontale. On a :

$h\left(t_{n,n+1}\right)=t_{n,n+1}\cos\left(\alpha_n\right)$ orienté vers la droite

$v\left(t_{n,n+1}\right)=t_{n,n+1}\sin\left(\alpha_n\right)$ orienté vers le bas

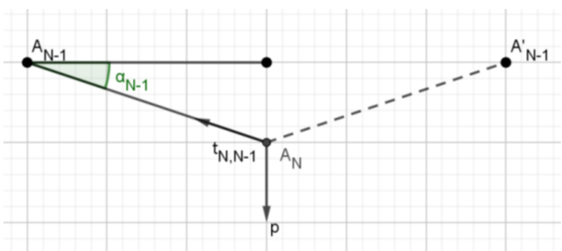
$h\left(t_{n,n-1}\right)=t_{n,n-1}\cos\left(\alpha_{n-1}\right)$ orienté vers la gauche, égal en module et opposé à $h\left(t_{n,n+1}\right)$

$v\left(t_{n,n-1}\right)=t_{n,n-1}\sin\left(\alpha_{n-1}\right)$ orienté vers le haut

D'où les équations :

$$h\left(t_{n,n-1}\right)=t_{n,n-1}\cos\left(\alpha_{n-1}\right)=h\left(t_{n,n+1}\right)=t_{n,n+1}\cos\left(\alpha_n\right)$$
$$v\left(t_{n,n-1}\right)=t_{n,n-1}\sin\left(\alpha_{n-1}\right)=v\left(t_{n,n+1}\right)+p=t_{n,n+1}\sin\left(\alpha_n\right)+p$$

Initialisation



Le point milieu est noté A_N ; le poids qui s'exerce en ce point est réparti entre les deux branches. Soit $t_{N,N-1}$ la tension sur la branche de gauche ; on a donc :

$$v\left(t_{N,N-1}\right)=\frac{p}{2}$$

$$t_{N,N-1}=\frac{p}{2\sin\left(\alpha_{N-1}\right)}$$

$$h\left(t_{N,N-1}\right)=\frac{p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-1}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-1}\right)}$$

au cran suivant, avec $n=N-1$:

$$h\left(t_{N-1,N-2}\right)=t_{N-1,N-2}\cos\left(\alpha_{N-2}\right)=h\left(t_{N-1,N}\right)=t_{N-1,N}\cos\left(\alpha_{N-1}\right)$$
$$v\left(t_{N-1,N-2}\right)=t_{N-1,N-2}\sin\left(\alpha_{N-2}\right)=v\left(t_{N-1,N}\right)+p=t_{N-1,N}\sin\left(\alpha_{N-1}\right)+p$$

$$v\left(t_{N-1,N-2}\right)=v\left(t_{N,N-1}\right)+p=\frac{3p}{2}$$

$$t_{N-1,N-2} = \frac{3p}{2\sin\left(\alpha_{N-2}\right)}$$

$$h\left(t_{N-1,N-2}\right) = t_{N,N-1}\cos\left(\alpha_{N-2}\right) = \frac{3p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-2}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-2}\right)}$$

Comme $h\left(t_{N-1,N-2}\right) = h\left(t_{N-1,N}\right) = h\left(t_{N,N-1}\right) = \frac{p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-1}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-1}\right)}$ on obtient :

$$\frac{3p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-2}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-2}\right)} = \frac{p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-1}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-1}\right)}$$

et donc :

$$\tan\left(\alpha_{N-2}\right) = 3\tan\left(\alpha_{N-1}\right)$$

(les angles augmentent à mesure que l'on se rapproche de la gauche)

Hypothèse de récurrence :

$$v\left(t_{N-k,N-(k+1)}\right) = \frac{(2k+1)p}{2}$$

$$t_{N-k,N-(k+1)} = \frac{(2k+1)p}{2\sin\left(\alpha_{N-(k+1)}\right)}$$

$$h\left(t_{N-k,N-(k+1)}\right) = t_{N-k,N-(k+1)}\cos\left(\alpha_{N-(k+1)}\right) = \frac{(2k+1)p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-(k+1)}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-(k+1)}\right)}$$

Comme $h\left(t_{N-k,N-(k+1)}\right) = h\left(t_{N-k,N-(k-1)}\right) = h\left(t_{N-(k-1),N-k}\right) = \frac{(2k-1)p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-k}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-k}\right)}$ on obtient :

$$\frac{(2k+1)p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-(k+1)}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-(k+1)}\right)} = \frac{(2k-1)p}{2}\frac{\cos\left(\alpha_{N-k}\right)}{\sin\left(\alpha_{N-k}\right)}$$

$$\tan\left(\alpha_{N-(k+1)}\right) = \frac{2k+1}{2k-1}\tan\left(\alpha_{N-k}\right)$$

Le dernier sera pour $k = N-1$:

$$\tan\left(\alpha_0\right) = \frac{2(N-1)+1}{2(N-1)-1}\tan\left(\alpha_1\right) = \frac{2N-1}{2N-3}\tan\left(\alpha_1\right)$$

$$\tan(\alpha_1)=\frac{2N-3}{2N-1}\tan(\alpha_0)$$

$$\tan(\alpha_{N-k})=\frac{2k-1}{2k+1}\tan\left(\alpha_{N-(k+1)}\right)$$

$$\tan(\alpha_k)=\frac{2N-(2k+1)}{2N-1}\tan(\alpha_0)$$

et pour $k=N-1$:

$$\tan(\alpha_{N-1})=\frac{2N-\left(2(N-1)+1\right)}{2N-1}\tan(\alpha_0)=\frac{2N-(2N-1)}{2N-1}=\frac{1}{2N-1}\tan(\alpha_0)$$

On constate que les relations entre angles consécutifs ne dépendent que du nombre de brins et sont indépendants du poids, de la longueur des brins et de la longueur du support.

Si l est la longueur totale de la chaînette, la demi-longueur est $\frac{l}{2}$ et chacun des N segments a pour longueur $\frac{l}{2N}$. Si la distance entre les points d'attache est δ, la demi-longueur est $\frac{\delta}{2}$ et on obtient la relation :

$$l\cos(\alpha_0)+l\cos(\alpha_1)+\cdots+l\cos(\alpha_{N-1})=N\delta,$$

qui permet de déterminer α_0, puis tous les autres.

Posons $\nu_k=\frac{2N-(2k+1)}{2N-1}=1-\frac{2k}{2N-1}$; on a :

$$\frac{\sin^2(\alpha_k)}{\cos^2(\alpha_k)}=\nu_k^2\frac{\sin^2(\alpha_0)}{\cos^2(\alpha_0)}$$

avec $x_k=\cos(\alpha_k)$, on obtient :

$$\frac{1-x_k^2}{x_k^2}=\nu_k^2\frac{1-x_0^2}{x_0^2}$$

$$x_k^2=\frac{x_0^2}{x_0^2\left(1-\nu_k^2\right)+\nu_k^2}\ ,\ k=0,\ldots,N-1$$

$$x_k = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2\left(1-\left(1-\frac{2k}{2N-1}\right)^2\right)+\left(1-\frac{2k}{2N-1}\right)^2}}$$

avec la contrainte :

et $\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x_k = \frac{\delta}{l}$

On peut écrire :

$$x_k = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2\left(1-\left(1-\frac{2k}{2N-1}\right)^2\right)+\left(1-\frac{2k}{2N-1}\right)^2}} \approx \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2\left(1-\left(1-\frac{k}{N}\right)^2\right)+\left(1-\frac{k}{N}\right)^2}}$$

La somme :

$$S = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2\left(1-\left(1-\frac{2k}{2N-1}\right)^2\right)+\left(1-\frac{2k}{2N-1}\right)^2}}$$

s'approxime donc par une somme de Riemann, lorsque $N \to +\infty$:

$$S \approx I = \int_0^1 \frac{x_0\, dx}{\sqrt{x_0^2\left(1-(1-x)^2\right)+(1-x)^2}}$$

Calcul de l'intégrale I où $x_0 = \cos(\alpha_0)$:

On pose $y = 1-x$.

$$I = x_0\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{x_0^2\left(1-y^2\right)+y^2}} = x_0\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{x_0^2+y^2\left(1-x_0^2\right)}} = \frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{\frac{x_0^2}{1-x_0^2}+y^2}}$$

Or $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{a+y^2}} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+a}}{\sqrt{a}}\right)$

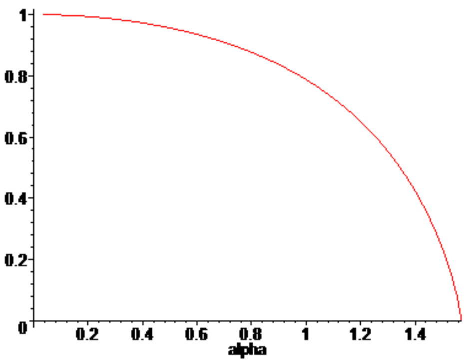
avec $a=\frac{x_0^2}{1-x_0^2}$,

$$I=\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{a+y^2}}=\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+\frac{x_0^2}{1-x_0^2}}}{\sqrt{\frac{x_0^2}{1-x_0^2}}}\right)=\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}\ln\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}}}{\frac{x_0}{\sqrt{1-x_0^2}}}\right)$$

et donc :

$$I=\frac{\cos(\alpha_0)}{\sin(\alpha_0)}\ln\left(\frac{\sin(\alpha_0)+1}{\cos(\alpha_0)}\right)$$

Voici le graphe de $g(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\ln\left(\frac{\sin(\alpha)+1}{\cos(\alpha)}\right)$, $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$:



En 0, l'angle est nul, $\frac{\delta}{l}=1$ et la chaînette réduite à un segment.

En $\pi/2$, l'angle est droit, $\frac{\delta}{l}=0$ et la longueur de chaînette infinie.

On a $g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\ln\left(\sqrt{2}+1\right)\approx 0.88$; autrement dit, si on veut un quotient $\frac{\delta}{l}\le 0.88$, il faudra un angle initial d'au moins $\frac{\pi}{4}$.

Si on fait intervenir l'angle moitié, en posant $t=\tan\frac{\alpha}{2}$, on a :

$$\sin(\alpha)=\frac{2t}{1+t^2}$$
$$\cos(\alpha)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

L'identité : $g(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}\ln\left(\frac{\sin(\alpha)+1}{\cos(\alpha)}\right)=\frac{\delta}{l}$ devient :

$$\frac{1-t^2}{2t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\frac{\delta}{l}$$

qui permet de déterminer t numériquement, lorsque δ, l sont connus.

On va calculer la somme correspondante pour les sinus ; elle nous donnera la flèche de la chaînette.

La somme :

$$S_1=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N}\frac{y_0}{\sqrt{y_0^2\left(1-\left(1-\frac{2k}{2N-1}\right)^2\right)+\left(1-\frac{2k}{2N-1}\right)^2}} \quad \text{avec } y_0=\sin(\alpha_0)$$

s'approxime par une somme de Riemann, lorsque $N\to+\infty$:

$$S_1\approx J=\int_0^1\frac{y_0\,dx}{\sqrt{y_0^2\left(1-(1-x)^2\right)+(1-x)^2}}$$

Calcul de l'intégrale J où $y_0=\sin(\alpha_0)$; on trouve :

$$J=\frac{\sin(\alpha_0)}{\cos(\alpha_0)}\ln\left(\frac{\cos(\alpha_0)+1}{\sin(\alpha_0)}\right)$$

C'est la même expression que I, où α_0 est remplacé par $\frac{\pi}{2}-\alpha_0$. Si on fait intervenir l'angle moitié, en posant $t=\tan\frac{\alpha_0}{2}$, on trouve :

$$J=\frac{2t}{1-t^2}\ln\left(\frac{1}{2t}\right),$$

avec :

$$\frac{1-t^2}{2t}\ln\left(\frac{1+t}{1-t}\right)=\frac{\delta}{l}.$$

Toutes ces expressions permettent une résolution numérique, mais non une résolution explicite.