Société de Calcul Mathématique SA
Outils d'aide à la décision
depuis 1995

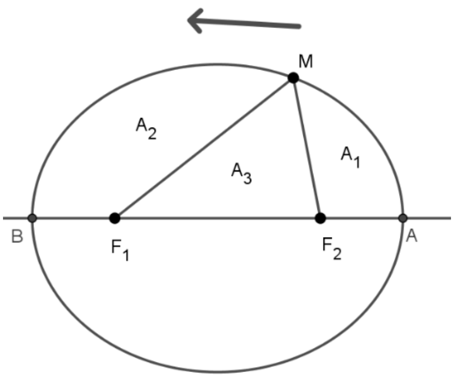
Ellipse : un paradoxe lié à la seconde loi de Kepler

Kepler se serait-il trompé ?

Un prix offert par la SCM !

23 janvier 2025

Considérons une ellipse très ordinaire, de demi grand axe a et demi petit axe b. Un satellite très ordinaire décrit cette ellipse, en obéissant aux lois de Kepler. On note F_1, F_2 les foyers et M la position du satellite. Celui-ci décrit l'ellipse dans le sens trigonométrique (la flèche sur la figure).



Selon la seconde loi, le segment F_2M décrit des aires égales en des temps égaux ; par conséquent, l'aire A_1, limitée par F_2A et F_2M , croît linéairement avec le temps. Si l'origine des temps est prise lorsque M est en A, , l'aire A_1 vaut :

$$A_1(t) = \frac{\pi ab}{T} t$$

où T désigne la période de révolution du satellite (temps total qu'il met pour parcourir une orbite). On sait en effet que l'aire de l'ellipse vaut πab.

De la même façon, le segment F_1M décrit des aires égales en des temps égaux ; par conséquent, l'aire A_2, limitée par F_1M et F_1B, décroît linéairement avec le temps. Elle s'écrit :

$A_2(t) = -\frac{\pi ab}{T} t + \frac{\pi ab}{2}$ puisque cette aire vaut $\frac{\pi ab}{2}$ pour $t = 0$ et 0 pour $t = \frac{T}{2}$.

Soit $A_3(t)$ l'aire limitée par le triangle F_1MF_2 ; on a évidemment :

$A_1(t) + A_2(t) + A_3(t) = \frac{\pi ab}{2}$: moitié supérieure de l'ellipse.

Mais alors :

$$\frac{\pi ab}{T}t - \frac{\pi ab}{T}t + \frac{\pi ab}{2} + A_3\left(t\right) = \frac{\pi ab}{2}$$

d'où résulte que $A_3\left(t\right) = 0$, ce qui est absurde. Où est l'erreur ?

La première bonne réponse gagne un CD de violoniste virtuose, non disponible dans le commerce, offert par la SCM ; voir :
https://www.scmsa.eu/archives/violoniste.gif