# Répartitions aléatoires entre deux groupes équiprobables

Bernard Beauzamy

Janvier 2026

## I. Présentation du résultat

Prenons un groupe de 10 000 personnes, à parité égale : 5 000 H et 5 000 F, et choisissons au hasard 5 000 personnes dans ce groupe : elles vont constituer le groupe A et le reste constituera le groupe B.

Beaucoup de gens pensent que les groupes A et B auront aussi la même parité H/F. Ceci est radicalement faux ; les lois de la Nature font en sorte que les deux groupes auront des effectifs différents. Voici un exemple de résultat, sur 20 répétitions ; à chaque fois, 20 fois de suite, les 10 000 personnes sont réparties entre deux sous-groupes de 5 000. On note à chaque fois le nombre d'H dans un groupe.

| groupe 1 | groupe 2 | différence |
|---|---|---|
| 5 012 | 4 988 | 24 |
| 5 076 | 4 924 | 152 |
| 4 896 | 5 104 | 208 |
| 5 032 | 4 968 | 64 |
| 4 904 | 5 096 | 192 |
| 5 019 | 4 981 | 38 |
| 5 003 | 4 997 | 6 |
| 4 995 | 5 005 | 10 |
| 5 033 | 4 967 | 66 |
| 4 928 | 5 072 | 144 |
| 4 954 | 5 046 | 92 |
| 5 039 | 4 961 | 78 |
| 4 946 | 5 054 | 108 |
| 4 908 | 5 092 | 184 |
| 5 071 | 4 929 | 142 |
| 5 018 | 4 982 | 36 |
| 4 908 | 5 092 | 184 |
| 4 958 | 5 042 | 84 |
| 4 882 | 5 118 | 236 |
| 4 990 | 5 010 | 20 |

## II. Fondements mathématiques

On dispose d'une variable aléatoire $X$ qui peut prendre les valeurs $\pm 1$ avec probabilité $1/2$.

On fait $N$ tirages de la variable. On note $Y$ la variable aléatoire qui indique la différence, en valeur absolue, entre le nombre de "+" et le nombre de "-". Le résultat est le suivant :

**Théorème.** – *L'espérance de la variable $Y$ vérifie :*

$$E(Y) = \frac{N}{2^{2N}} \binom{N}{\frac{N}{2}} \sim \frac{\sqrt{2N}}{\sqrt{\pi}} \text{ lorsque } N \to +\infty$$

**Démonstration du Théorème**

Si $X$ prend $k$ fois la valeur +1, et donc $N-k$ fois la valeur -1, la variable $Y$ vaut $\left|k-(N-k)\right| = |N-2k|$, et ceci avec probabilité $p_k = \frac{1}{2^N}\binom{N}{k}$. On s'intéresse à l'espérance de $Y$. On peut évidemment supposer $N$ pair : $N = 2n$.

Il est évident que les valeurs prises et les probabilités sont symétriques par rapport à la valeur médiane $n$ : lorsque $k$ passe de 0 à $n$, la différence $Y$ décroît, de $2n$ à 0, et la probabilité croît, de $1/2^{2n}$ à $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$. Lorsque $k$ passe de $n+1$ à $2n$, c'est l'inverse. Il suffit donc de considérer la première moitié : les valeurs prises sont $y_k = 2n-2k$, avec probabilité $p_k = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{k}$, $k = 0,\dots,n$.

L'espérance vaut :

$$E(Y) = \sum_{k=0}^{2n} |2n-2k| \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{k} = \frac{1}{2^{2n-2}} \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{2n}{k}$$

Calculons d'abord :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k}$$

On sait que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} + \binom{2n}{n} + \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} = 2^{2n}$$

et que :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k}$$

Donc :

$$2\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} + \binom{2n}{n} = 2^{2n}$$

et :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{k} = 2^{2n-1} - \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$$

enfin :

$$A = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{k} = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}$$

Calculons maintenant :

$$B = \sum_{k=0}^{n} k\binom{2n}{k} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{(2n)!}{(2n-k)!k!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(2n)!}{(2n-k)!(k-1)!} = 2n\sum_{k=1}^{n} \frac{(2n-1)!}{(2n-1-(k-1))!(k-1)!}$$

et avec $j = k-1$ :

$$B = 2n\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2n-1-j)!j!}$$

On raisonne comme précédemment :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2n-1-j)!j!} + \sum_{j=n}^{2n-1} \frac{(2n-1)!}{(2n-1-j)!j!} = 2^{2n-1}$$

Les deux sommes sont égales ; par conséquent :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(2n-1)!}{(2n-1-j)!j!} = 2^{2n-2}$$

et :

$$B = n2^{2n-1}$$

On obtient :

$$E(Y)=\frac{1}{2^{2n-2}}\left(n\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}-\sum_{k=0}^{n}k\binom{2n}{k}\right)=\frac{1}{2^{2n-2}}(nA-B)=\frac{1}{2^{2n-2}}\left(n\left(2^{2n-1}+\frac{1}{2}\binom{2n}{n}\right)-n2^{2n-1}\right)$$

et finalement :

$$E(Y)=\frac{n}{2^{2n-1}}\binom{2n}{n}=\frac{n}{2^{2n-1}}\frac{(2n)!}{n!^2}$$

On peut facilement trouver un équivalent, lorsque $N$ devient grand en utilisant la formule de Stirling :

$$n!\sim\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$$

On obtient :

$$E(Y)\sim\frac{n}{2^{2n-1}}\frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}\sqrt{2\pi 2n}}{\left(\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{\pi 2n}\right)^2}=\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}}=\frac{\sqrt{2N}}{\sqrt{\pi}}$$

ce qui prouve le Théorème.