Société de Calcul Mathématique SA
*Outils d'aide à la décision*
*depuis 1995*

# Fonction de répartition associée à un taux de risque

Bernard Beauzamy
14/04/2020

La fonction densité de probabilité d'un taux de risque est définie par :

$$f(x) = cx^n (1-x)^{N-n}$$

avec $c = \dfrac{(N+1)!}{n!(N-n)!}$

Proposition. - On a, pour tout $a,\ 0 \le a \le 1$ :

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k} a^k (1-a)^{N-k+1}$$

Démonstration :

$$I_n = \int_a^1 x^n (1-x)^{N-n}\,dx = \left[\frac{-x^n (1-x)^{N-n+1}}{N-n+1}\right]_a^1 + n\int_a^1 \frac{x^{n-1}(1-x)^{N-n+1}}{N-n+1}\,dx$$

$$= \frac{a^n (1-a)^{N-n+1}}{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1}\int_a^1 x^{n-1}(1-x)^{N-n+1}\,dx$$

Donc :

$$I_n = \frac{a^n (1-a)^{N-n+1}}{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1} I_{n-1}$$

$$I_{n-1} = \frac{1}{N-n+2} a^{n-1} (1-a)^{N-n+2} + \frac{n-1}{N-n+2} I_{n-2}$$

donc :

$$I_n = \frac{1}{N-n+1} a^n (1-a)^{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1} \frac{1}{N-n+2} a^{n-1} (1-a)^{N-n+2} + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} I_{n-2}$$

$$I_{n-2} = \frac{1}{N-n+3} a^{n-2} (1-a)^{N-n+3} + \frac{n-2}{N-n+3} I_{n-3}$$

$$\begin{aligned} I_n = {} & \frac{1}{N-n+1} a^n (1-a)^{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1} \frac{1}{N-n+2} a^{n-1} (1-a)^{N-n+2} \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{1}{N-n+3} a^{n-2} (1-a)^{N-n+3} + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} I_{n-3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n = {} & \frac{1}{N-n+1} a^n (1-a)^{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1} \frac{1}{N-n+2} a^{n-1} (1-a)^{N-n+2} \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{1}{N-n+3} a^{n-2} (1-a)^{N-n+3} + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} I_{n-3} \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} \cdots \frac{n-(k-2)}{N-n+k} a^{n-(k-1)} (1-a)^{N-n+k} \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} \cdots \frac{n-(k-1)}{N-n+k} I_{n-k} \end{aligned}$$

On a :

$$I_0 = \int_a^1 (1-x)^N \, dx = \frac{-1}{N+1} \Big[ (1-x)^{N+1} \Big]_a^1 = \frac{1}{N+1} (1-a)^{N+1}$$

$$\begin{aligned} I_n = {} & \frac{1}{N-n+1} a^n (1-a)^{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1} \frac{1}{N-n+2} a^{n-1} (1-a)^{N-n+2} \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{1}{N-n+3} a^{n-2} (1-a)^{N-n+3} + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} I_{n-3} \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} \cdots \frac{n-(k-2)}{N-n+k} a^{n-(k-1)} (1-a)^{N-n+k} + \cdots + \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} \cdots \frac{n-(n-1)}{N-n+n} I_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_n = {} & \frac{1}{N-n+1} a^n (1-a)^{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1} \frac{1}{N-n+2} a^{n-1} (1-a)^{N-n+2} \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{1}{N-n+3} a^{n-2} (1-a)^{N-n+3} + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} I_{n-3} \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} \cdots \frac{n-(k-2)}{N-n+k} a^{n-(k-1)} (1-a)^{N-n+k} + \cdots + \\ & + \frac{n}{N-n+1} \frac{n-1}{N-n+2} \frac{n-2}{N-n+3} \cdots \frac{1}{N} \frac{1}{N+1} (1-a)^{N+1} \end{aligned}$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n}{N-n+1}\frac{n-1}{N-n+2}\frac{n-2}{N-n+3}\cdots\frac{n-(k-2)}{N-n+k} a^{n-(k-1)}(1-a)^{N-n+k}$$

$$I_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(n-k+1)!}\frac{(N-n)!}{(N-n+k)!} a^{n-(k-1)}(1-a)^{N-n+k}$$

avec $c = \dfrac{(N+1)!}{(N-n)!n!}$ :

$$\begin{aligned}\int_a^1 f(x)dx &= \frac{(N+1)!}{(N-n)!n!} I_n \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n-k+1)!}\frac{(N+1)!}{(N-n+k)!} a^{n-(k-1)}(1-a)^{N-n+k}\end{aligned}$$

Posons $j = k-1$ ; on a :

$$\int_a^1 f(x)dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-j)!}\frac{(N+1)!}{(N+1-(n-j))!} a^{n-j}(1-a)^{N-n+j+1}$$

et avec $k = n-j$ :

$$\int_a^1 f(x)dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(N+1)!}{(N+1-k)!} a^{k}(1-a)^{N-k+1}$$

ce qui prouve la proposition.

Vérification : on va calculer la dérivée :

$$F(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k} a^k (1-a)^{N-k+1} = (1-a)^{N+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{N+1}{k} a^k (1-a)^{N-k+1}$$

$$F'(a) = -(N+1)(1-a)^N + \sum_{k=1}^{n} \binom{N+1}{k}\left(ka^{k-1}(1-a)^{N-k+1} - (N-k+1)a^k(1-a)^{N-k}\right)$$

$$F'(a) = -(N+1)(1-a)^N + \sum_{k=1}^{n} \frac{(N+1)!}{(N+1-k)!(k-1)!} a^{k-1}(1-a)^{N-k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(N+1)!}{(N-k)!k!} a^k (1-a)^{N-k}$$

$$= -(N+1)(1-a)^N + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(N+1)!}{(N-j)!\,j!} a^j (1-a)^{N-j} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(N+1)!}{(N-k)!k!} a^k (1-a)^{N-k}$$

$$= -(N+1)(1-a)^N + \frac{(N+1)!}{N!}(1-a)^N - \frac{(N+1)!}{(N-n)!n!} a^n (1-a)^{N-n}$$

$$= -\frac{(N+1)!}{(N-n)!n!} a^n (1-a)^{N-n}$$

Ce qui prouve notre assertion.

On définit :

$\varphi_{a,b}(x) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!} x^a (1-x)^b$, pour $0 \le x \le 1$. C'est une fonction positive, d'intégrale 1.

Soient $n, N$. La fonction de répartition du taux de risque associé :

$$F_{n,N}(x) = P(\lambda \le x)$$

vérifie :

$$F(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(N+1)!}{(N+1-k)!k!} x^k (1-x)^{N-k+1} = 1 - \frac{1}{N+2} \sum_{k=0}^{n} \varphi_{k,N+1-k}$$

Pour $k = 0$, $\varphi_{k,N+1-k}(x) = \frac{(N+2)!}{(N+1)!}(1-x)^{N+1} = (N+2)(1-x)^{N+1}$

et donc :

$$\varphi_{0,N+1}(0) = N+2, \varphi_{0,N+1}(1) = 0,$$

Pour $k \ge 1$, $\varphi_{k,N+1-k}(x) = \frac{(N+2)!}{k!(N+1-k)!} x^k (1-x)^{N+1-k}$

et donc :

$$\varphi_{k,N+1-k}(0) = 0, \varphi_{k,N+1-k}(1) = 0$$

$$F(0) = 1 - \frac{1}{N+2} \sum_{k=0}^{n} \varphi_{k,N+1-k}(0) = 0$$

$$F(1) = 1 - \frac{1}{N+2} \sum_{k=0}^{n} \varphi_{k,N+1-k}(1) = 1.$$

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k} a^k (1-a)^{N-k+1}$$

On a :

$$\begin{aligned} 1 - F(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k} x^k (1-x)^{N+1-k} \\ &= (1-x)^{N+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k \end{aligned}$$

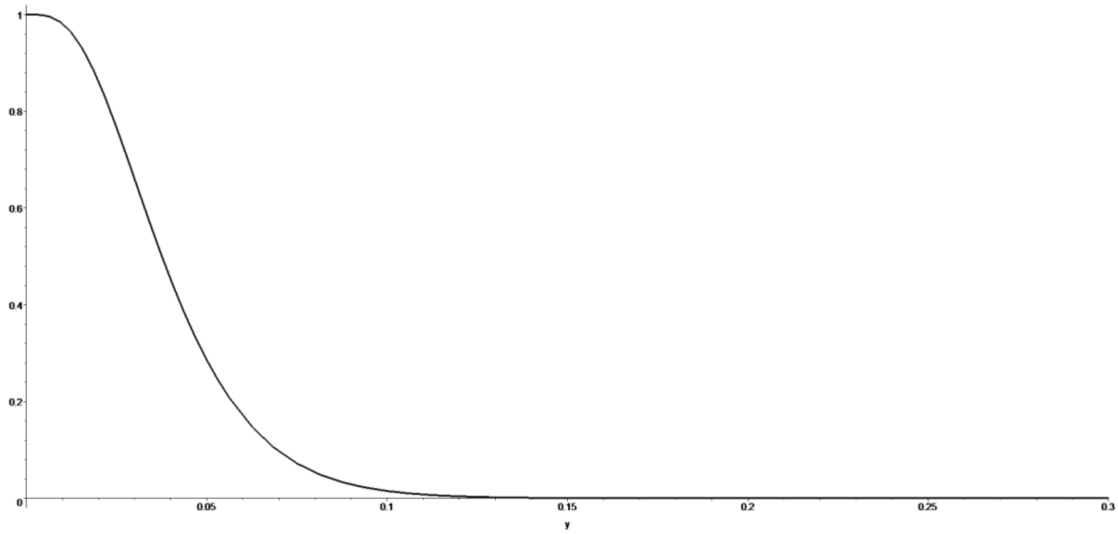
On pose $y = \frac{x}{1-x}$ d'où $x = \frac{y}{1+y}$, $1 - x = \frac{1}{1+y}$

Si $x = 0$, $y = 0$, si $x = 1$, $y = +\infty$, donc $y$ varie entre $0$ et $+\infty$.

$$1 - F(x) = G(y) = \frac{1}{(1+y)^{N+1}} \sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k} y^k$$

Cas $n = 3, N = 100$

$$G(y) = \frac{1 + 101y + 5050y^2 + 166650y^3}{(1+y)^{101}}$$




Il est facile numériquement de déterminer $y$ pour que $G(y) = \varepsilon$ ou $G(y) = 1 - \varepsilon$