Fonction de répartition associée à un taux de risque

Bernard Beauzamy
14/04/2020

La fonction densité de probabilité d'un taux de risque (n accidents sur N essais) est définie par :

$$f_{n,N}(x) = cx^n (1-x)^{N-n}, \text{ avec } c = \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} .$$

Proposition. - *On a, pour tout* a, $0 \le a \le 1$:

$$\int_a^1 f_{n,N}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k} a^k (1-a)^{N-k+1} .$$

Démonstration. - On a, en intégrant par parties :

$$I_n = \int_a^1 x^n (1-x)^{N-n}\,dx = \frac{a^n (1-a)^{N-n+1}}{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1} I_{n-1}$$

De même :

$$I_{n-1} = \frac{a^{n-1}(1-a)^{N-n+2}}{N-n+2} + \frac{n-1}{N-n+2} I_{n-2}$$

et en itérant :

$$\begin{aligned} I_n = {} & \frac{a^n (1-a)^{N-n+1}}{N-n+1} + \frac{n}{N-n+1}\frac{1}{N-n+2} a^{n-1}(1-a)^{N-n+2} \\ & + \frac{n}{N-n+1}\frac{n-1}{N-n+2}\frac{1}{N-n+3}\left(a^{n-2}(1-a)^{N-n+3} + (n-2) I_{n-3}\right) + \cdots + \\ & + \frac{n}{N-n+1}\frac{n-1}{N-n+2}\frac{n-2}{N-n+3}\cdots\frac{n-(k-2)}{N-n+k}\left(a^{n-(k-1)}(1-a)^{N-n+k} + \left(n-(k-1)\right) I_{n-k}\right) \end{aligned}$$

On a :

$$I_0 = \int_a^1 (1-x)^N\,dx = \frac{-1}{N+1}\Big[(1-x)^{N+1}\Big]_a^1 = \frac{1}{N+1}(1-a)^{N+1},$$

et donc finalement :

$$I_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{n!}{(n-k+1)!}\frac{(N-n)!}{(N-n+k)!}a^{n-(k-1)}(1-a)^{N-n+k}$$

Or :

$$\int_a^1 f_{n,N}(x)\,dx = \frac{(N+1)!}{(N-n)!n!}I_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n-k+1)!}\frac{(N+1)!}{(N-n+k)!}a^{n-(k-1)}(1-a)^{N-n+k} \;,$$

et donc :

$$\int_a^1 f_{n,N}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{(N+1)!}{(N+1-k)!}a^k(1-a)^{N-k+1},$$

ce qui prouve la Proposition.

Corollaire 2. - *On peut écrire :*

$$F_{n,N}(x) = 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k} x^k (1-x)^{N+1-k} = 1-(1-x)^{N+1}\sum_{k=0}^{n} \binom{N+1}{k}\left(\frac{x}{1-x}\right)^k$$

Avec la notation $\varphi_{a,b}(x) = \frac{(a+b+1)!}{a!b!}x^a(1-x)^b$, $0 \le x \le 1$, on en déduit :

Corollaire 3. - *La fonction de répartition du taux de risque s'écrit :*

$$F_{n,N}(x) = 1 - \frac{1}{N+2}\sum_{k=0}^{n} \varphi_{k,N+1-k}(x).$$