Objets en rapprochement

Bernard Beauzamy, janvier 2025

Soient deux objets, de masses respectives m_1, m_2, attirés l'un vers l'autre par la loi de la gravitation universelle, séparés par une distance d. On cherche à déterminer l'instant de rencontre des deux objets.

Remarque préliminaire. – L'énoncé n'est nullement absurde. On peut penser à deux sondes spatiales, envoyées sur des trajectoires parallèles, dans une zone de l'espace où l'influence des autres astres est négligeable. Les deux sondes sont immobiles l'une par rapport à l'autre, mais vont se rapprocher du fait de leur interaction mutuelle.

1. Résolution du problème

Proposition. – *L'instant de collision est donné par :*

$$t = \frac{d^{3/2}}{\sqrt{2G}} \frac{1}{\sqrt{m_1 + m_2}} \frac{\pi}{2}$$

Démonstration

On écrit la loi de la gravitation universelle $F = \frac{G m_1 m_2}{d^2}$; on admet que la force est la même des deux côtés : $F_2 = -F_1$. On note x_1, x_2 les abscisses respectives des deux points sur l'axe et d leur distance initiale. A un instant $t,$ on aura $F_1 = \frac{G m_1 m_2}{\left(x_1(t) - x_2(t)\right)^2}$ et l'opposé pour F_2.

Rappel : $G = 6,67 \times 10^{-11} \, N \, m^2 \, kg^{-2}$ ou en $m^3 \, kg^{-1} \, s^{-2}$.

L'accélération à un instant t sera pour le premier $\gamma_1(t)=\frac{F_1(t)}{m_1}=\frac{Gm_2}{\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2}$ et l'opposé pour l'autre. $\gamma_1(t)=\frac{F_1(t)}{m_1}=\frac{Gm_2}{\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2}$.

L'accélération est en $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}\times kg\times m^{-2}=m/s^2$.

On a donc le système d'équations, en notant $x''=\frac{d^2x}{dt^2}$:

$$\begin{cases} x_1''(t)=\dfrac{Gm_2}{\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2} \\ x_2''(t)=-\dfrac{Gm_1}{\left(x_1(t)-x_2(t)\right)^2} \end{cases}$$

et donc :

$$\frac{x_1''}{m_2}=-\frac{x_2''}{m_1}$$

Si on introduit le centre de gravité du système (M_1,M_2), noté Ω, il se situe sur le segment M_1M_2 et vérifie $m_1\overrightarrow{\Omega M_1}+m_2\overrightarrow{\Omega M_2}=0$, ou :

$$\overrightarrow{O\Omega}=\frac{m_1\overrightarrow{OM_1}+m_2\overrightarrow{OM_2}}{m_1+m_2}$$

et donc :

$$\overrightarrow{\Omega M_1}=-\frac{m_2}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$$

$$\overrightarrow{\Omega M_2}=\frac{m_1}{m_1+m_2}\overrightarrow{M_1M_2}$$

Comme le système (M_1,M_2) est isolé, ce centre de gravité est immobile et peut être pris comme origine. Les deux objets vont donc se rejoindre en Ω. On a à tout instant :

$$x_2(t)=\frac{m_1}{m_1+m_2}\left(x_2(t)-x_1(t)\right)$$

$$x_2(t)-x_1(t)=\frac{m_1+m_2}{m_1}x_2(t)$$

$$x_2''(t)=-\frac{Gm_1}{\left(\frac{m_1+m_2}{m_1}x_2(t)\right)^2}$$

ou encore :

$$x_2''=-\frac{Gm_1^3}{(m_1+m_2)^2 x_2^2}$$

Unités : en $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}\times kg\times m^{-2}=m/s^2$

ou encore, en posant $x=x_2$, $\lambda=\frac{Gm_1^3}{(m_1+m_2)^2}$,

$$x''=-\frac{\lambda}{x^2}\ \ (1)$$

L'objet M_2 se déplace de la droite vers la gauche et l'accélération, négative, augmente en valeur absolue à mesure qu'elle se rapproche du point fixe Ω pris comme origine. A l'instant 0, $x_2=\frac{m_1\,d}{m_1+m_2}$.

On déduit de (1) :

$$x''\,x'=-\frac{\lambda x'}{x^2}$$

d'où en intégrant :

$$\frac{1}{2}x'^2=\frac{\lambda}{x}+C\ \ (2)$$

Au temps $t=0$, la distance entre Ω et M_2 vérifie :

$$x=\frac{m_1 d}{m_1+m_2}$$

et la vitesse est nulle. On en déduit :

$$C=-\frac{\lambda\left(m_1+m_2\right)}{m_1 d}=-\frac{Gm_1^3}{\left(m_1+m_2\right)^2}\frac{\left(m_1+m_2\right)}{m_1 d}=-\frac{Gm_1^2}{m_1+m_2}\frac{1}{d}$$

C est en $m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}\times kg\times m^{-1}=m^2\,/\,s^2$, ce qui est cohérent avec le premier membre.

L'équation (2) s'écrit :

$$x'^2=\frac{2Gm_1^2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{1}{x}-\frac{1}{d}\right)$$

et, puisque la vitesse est dirigée vers la gauche :

$$x'=-\sqrt{\frac{2Gm_1^2}{m_1+m_2}\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\frac{1}{x}-\frac{1}{d}\right)}=-\sqrt{\frac{2Gm_1^3}{\left(m_1+m_2\right)^2}}\sqrt{\frac{1}{x}-\frac{1}{d}\frac{m_1+m_2}{m_1}}$$

Vérification d'unités : $\sqrt{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}\times kg}\times\sqrt{1/m}=m/s$.

On pose $\alpha=\sqrt{\frac{2Gm_1^3}{\left(m_1+m_2\right)^2}}$, $\beta=\frac{1}{d}\frac{m_1+m_2}{m_1}$ avec $\alpha,\beta>0$. On a :

$$x'=-\alpha\sqrt{\frac{1}{x}-\beta}$$

On pose :

$$v=\sqrt{\frac{1}{x}-\beta},\ v^2=\frac{1}{x}-\beta,\ \frac{1}{x}=v^2+\beta,\ x=\frac{1}{v^2+\beta},\ x'=-\frac{2vv'}{\left(v^2+\beta\right)^2}$$

On a $v(0)=0$ et :

$$\frac{v'}{\left(v^2+\beta\right)^2}=\frac{\alpha}{2}$$

$$\frac{v'}{\left(\frac{v^2}{\beta}+1\right)^2}=\frac{\alpha\beta^2}{2}$$

Si $w=\frac{v}{\sqrt{\beta}}$, $v=w\sqrt{\beta}$, $v'=w'\sqrt{\beta}$, $w(0)=0$

$$\frac{w'\sqrt{\beta}}{\left(w^2+1\right)^2}=\frac{\alpha\beta^2}{2},\ \frac{w'}{\left(w^2+1\right)^2}=\frac{\alpha\beta^2}{2\sqrt{\beta}}.$$

En intégrant :

$$\frac{w}{2\left(w^2+1\right)}+\frac{\arctan(w)}{2}=\frac{\alpha\beta^2}{2\sqrt{\beta}}t+C_1$$

En $t=0,\ w=0,$ donc $C_1=0.$ Il vient :

$$t=\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha\beta^2}\left(\frac{w}{w^2+1}+\arctan(w)\right)$$

ou encore :

$$t=\frac{v}{\alpha\beta}\frac{1}{v^2+\beta}+\frac{\sqrt{\beta}}{\alpha\beta^2}\arctan\left(\frac{v}{\sqrt{\beta}}\right)$$

et en revenant en x :

$$t=\frac{1}{\alpha\beta}\left(\sqrt{x-\beta x^2}+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{\beta x}-1}\right)\right)$$

avec $\alpha=\sqrt{\frac{2Gm_1^3}{\left(m_1+m_2\right)^2}}$, $\beta=\frac{1}{d}\frac{m_1+m_2}{m_1}$.

Le temps final est obtenu pour $x=0$; l'arctangente vaut $\frac{\pi}{2}$ et donc :

$$t=\frac{1}{\alpha\beta}\frac{1}{\sqrt{\beta}}\frac{\pi}{2}$$

$$t=\frac{1}{\sqrt{\frac{2Gm_1^3}{\left(m_1+m_2\right)^2}}\frac{1}{d}\frac{m_1+m_2}{m_1}}\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{d}\frac{m_1+m_2}{m_1}}}\frac{\pi}{2}$$

Ce qui s'écrit :

$$t=\frac{d^{3/2}}{\sqrt{2G}}\frac{1}{\sqrt{m_1+m_2}}\frac{\pi}{2}$$

vérification d'unités $m^{3/2}\left(\sqrt{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\right)^{-1} kg^{-1/2} = m^{3/2}\left(\sqrt{m^{-3}\,kg\,s^2}\right)kg^{-1/2} = \left(\sqrt{kg\,s^2}\right)kg^{-1/2} = s$

Si la distance est d'un km et les masses de 5 et 3 tonnes, on trouve :

$t \approx 556\ jours$.

Si les masses sont d'une tonne, il faudra 3 ans.

2. Représentation de la vitesse

En fonction de l'abscisse x, elle est donnée par la formule vue plus haut :

$v(x) = -\alpha\sqrt{\frac{1}{x} - \beta}$ (dirigée vers la gauche)

Pour $x < 600$, elle est si faible que Maple ne parvient pas à la représenter :

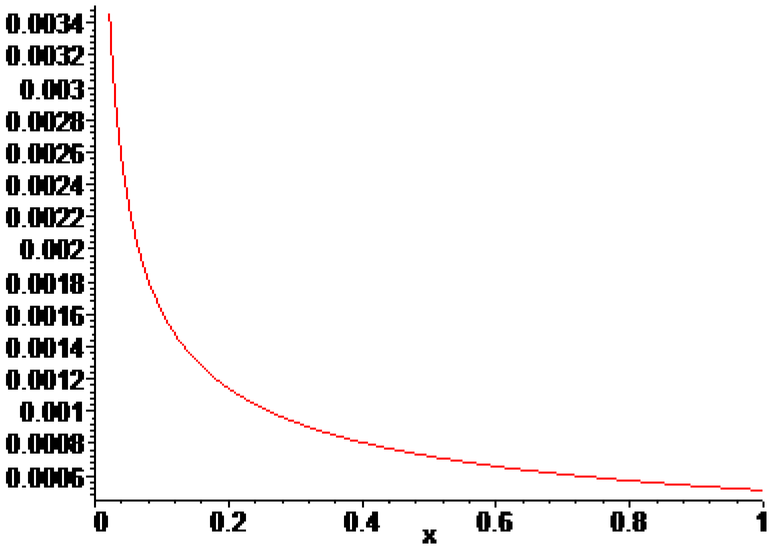
$v(600) \approx 0.4\times10^{-5}\ m/s$

Si la distance mutuelle est de 100 m : $v(100) \approx 0.5\times10^{-4}\ m/s$

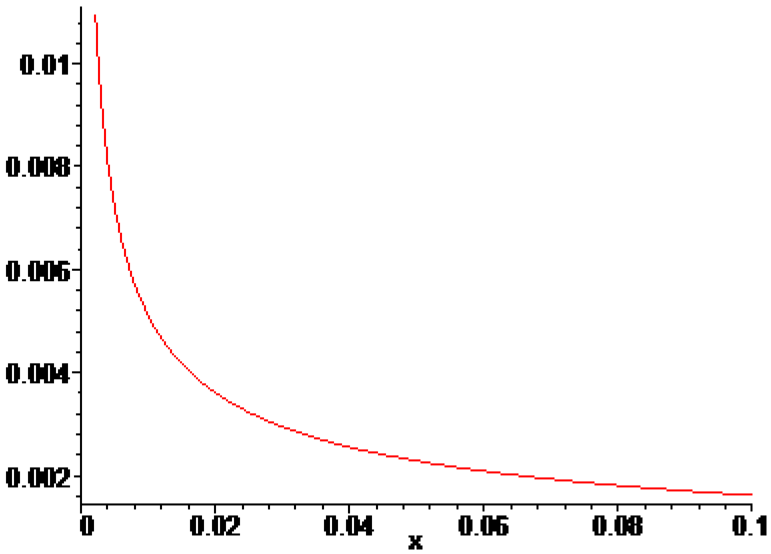
à dix mètres : $v(10) \approx 0.16\times10^{-3}\ m/s$

à un mètre : $v(1) = 0.5\times10^{-3}\ m/s$,

et voici le dernier mètre :



le dernier centimètre :



et la vitesse de rapprochement ne dépassera 1 m/s que pour :

$x < 0.26 \times 10^{-6}\ m$.

3. Remarques concernant la loi de la gravitation universelle

Cette loi est étonnante à plusieurs aspects et ne peut être juste en toute généralité. Lorsque la distance tend vers 0, l'accélération tend vers l'infini, donc la vitesse de chaque objet aussi. Pour des sphères, on peut objecter qu'on est limité par le rayon de la sphère, mais on peut prendre deux disques infiniment plats : la formule semble indiquer qu'il est impossible de séparer deux disques accolés l'un à l'autre.

Parmi les autres étrangetés, citons :

- Il semble que la gravitation se propage à l'infini et à vitesse infinie ;
- Elle n'admet aucun obstacle : l'influence de la Lune se fait sentir de l'autre côté de la Terre, alors que tout rayonnement peut être limité par un écran approprié (lumière, ondes hertziennes, radioactivité, etc.) ;
- Elle requiert une dépense d'énergie : si je dispose d'une masse d'un kg, dans l'espace, elle sera attirée par une planète ou une étoile ; je connais donc la direction de cette étoile. Si je dispose de deux visées, j'en déduis la position de l'étoile ; la gravitation génère donc une information. Celle-ci est-elle gratuite ? A priori, cela se traduit par une diminution des masses ;
- Elle ne dépend que de la masse des corps et non de leur composition atomique ou moléculaire. Un kg d'hydrogène et un kg de plomb résultent en la même attraction gravitationnelle. La force d'attraction ne peut donc être liée à la structure atomique des corps.