Société de Calcul Mathématique SA
Outils d'aide à la décision
depuis 1995

Mouvement dans un champ uniforme, force centrale

Bernard Beauzamy

mai 2025

Résumé opérationnel

Dans un premier article, intitulé "L'ellipse et ses mystères" [1], disponible ici :
https://www.scmsa.eu/archives/BB_ellipse_mysteres.pdf
nous avons montré que l'on ne comprenait rien aux lois de Kepler et que nos mathématiques étaient incapables de les décrire correctement (voir la version 4, avril 2025).

Dans un second article, intitulé "Discrétisation d'un mouvement : une approche incorrecte" [2], disponible ici :
https://www.scmsa.eu/archives/BB_erreur_discretisation_mouvement_2025_04.pdf
nous montrons qu'une approche très répandue (utilisée en particulier par le CNES et la DGA) conduisait à des résultats incorrects, du fait des discrétisations utilisées.

Dans le présent article, nous nous interrogeons : puisqu'on n'arrive à rien dans le cas général d'un champ Newtonien en $1/d^2$, qui est celui que la Nature nous impose, peut-être serons-nous plus heureux en supposant le champ constant : gravitation indépendante de la distance. A priori, les choses devraient être plus simples et nous ne nous éloignons pas beaucoup de la réalité : les orbites des planètes ou des satellites sont presque des cercles et, à grande distance, la gravitation varie très peu.

La réponse est particulièrement réjouissante : le cas d'un champ de gravitation uniforme est pire que celui d'un champ Newtonien ; on ne parvient pas à écrire correctement les équations ni, évidemment, à les résoudre. Le mouvement est nécessairement une sorte de spirale : le mobile se rapproche de la Terre, mais selon une trajectoire compliquée qui n'admet pas de représentation analytique ; la trajectoire asymptotique est toujours un cercle, dont le rayon est solution d'une équation du troisième degré (second degré dans un cas particulier).

Dans tous les cas, le rayon de ce cercle dépend fondamentalement des conditions initiales, ce qui peut être considéré comme très étonnant. On aurait pu s'attendre à ce que le mobile termine toujours de la même façon, quelle que soit la manière dont il a été lancé.

On voit ici une nouvelle illustration des conclusions qui figurent dans chacun de nos articles : même dans les cas les plus simples, nos mathématiques sont impuissantes à décrire correctement les phénomènes naturels.

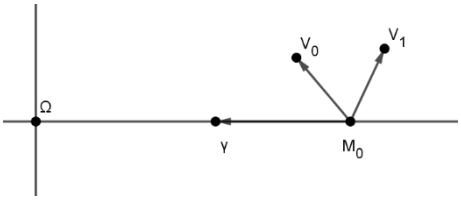
I. Position du problème

On suppose que le mobile est soumis à un champ d'attraction uniforme en tout point de l'espace : $\gamma = cste,$ toujours dirigé vers le centre de la Terre, noté $\Omega.$ C'est à peu près ce qui se passe pour un satellite : le champ est en $1/d^2,$ mais à grande distance la variation est très faible.

On veut déterminer le mouvement du mobile. On sait que ce mouvement est nécessairement plan (loi de Kepler, voir [1]).

A. *Approche physique*

On note M_0 la position initiale du mobile et $\overrightarrow{V_0}$ sa vitesse initiale. L'axe de référence est l'axe ΩM_0, pris comme axe Ωx et l'axe Ωy s'en déduit. On peut toujours (par symétrie) supposer que la seconde coordonnée de $\overrightarrow{V_0}$ est ≥ 0.



Sur le graphique ci-contre, on voit deux orientations possibles pour la vitesse initiale, notées respectivement $\overrightarrow{V_0}, \overrightarrow{V_1}$.

Ce graphique, communément utilisé, est trompeur car il fait figurer des concepts qui ne sont pas de même nature : une accélération et une vitesse.

Dans notre article "Discrétisation d'un mouvement : une approche incorrecte" [2], nous mettons en évidence les erreurs souvent commises.

Passons rapidement sur les cas extrêmes. Si la vitesse $\overrightarrow{V_0}$ est dirigée vers $\Omega,$ le mouvement est uniformément accéléré :

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2 + V_0 t + x_0 ,$$

où x_0 est la distance de Ω à M_0 et γ, V_0 sont négatifs.

Si la vitesse $\overrightarrow{V_0}$ est dirigée vers la droite ($V_0 > 0$), l'équation est la même ; le mouvement est d'abord ralenti, puis accéléré.

Voyons maintenant le cas général. Avant d'aborder la mise en équations, observons que des conclusions physiques très utiles peuvent être déduites du graphique ci-dessus.

Proposition 1. – *A tout instant, la direction prise par le mobile se situera dans l'angle* $\left(\overrightarrow{M_0\Omega},\overrightarrow{V_0}\right)$.

Autrement dit, le mobile ira dans le cône délimité par l'accélération et la vitesse initiale (ou la vitesse à l'instant précédent, par généralisation).

Démonstration de la Proposition 1. - Ceci est évident physiquement et intuitivement, pas du tout mathématiquement. Le mobile est soumis à deux influences :

— Une accélération ; si elle était seule, il continuerait en ligne droite, ici sur l'axe $M_0\Omega$. Mais, du fait de la vitesse $\overrightarrow{V_0}$, il ne peut rester sur cet axe et doit le quitter en allant vers le haut.

— Une vitesse initiale ; si elle était seule, il continuerait en ligne droite, ici sur la direction $\overrightarrow{V_0}$. Mais, du fait de l'accélération, il ne peut rester sur cet axe et doit le quitter en allant vers la gauche.

Il en résulte que le mouvement sera nécessairement à l'intérieur du cône déterminé par les deux directions, ce qui prouve notre Proposition.

Corollaire. – *Au cours du temps, l'angle* $\left(\overrightarrow{M_0\Omega},\overrightarrow{V_0}\right)$ *ne peut que diminuer : la direction prise par le mobile tend à se rapprocher de la direction du centre de la Terre.*

Ce raisonnement est purement qualitatif ; pour le rendre quantitatif, nous allons devoir écrire des équations.

B. Approche en coordonnées cartésiennes

1. Cas général : $\overrightarrow{V_0}$ quelconque

Instant initial

On note α l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M},\overrightarrow{V}\right)$; l'angle initial est $\alpha_0=\left(\overrightarrow{\Omega M_0},\overrightarrow{V_0}\right)$. On note V_0 la longueur du vecteur $\overrightarrow{V_0}$. On a les équations :

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}\gamma t^2+V_0\cos\left(\alpha_0\right)t+x_0 \\ y=V_0\sin\left(\alpha_0\right)t \end{cases}$$

D'où :

$$t = \frac{y}{V_0 \sin(\alpha_0)}$$

$$x = \frac{\gamma y^2}{2V_0^2 \sin^2(\alpha_0)} + \frac{y}{\tan(\alpha_0)} + x_0 ,$$

qui est l'équation d'une parabole, tangente en M_0 à l'axe vertical. Mais cette équation n'est valable qu'à l'instant 0 ; par la suite, γ n'est plus porté par Ωx.

Au temps $t = 0$, on a $y = 0$, $x = x_0 = r_0$ et :

$\dot{\vartheta}(0) = \frac{1}{r_0^2} x_0 V_{0,y} = \frac{V_0}{r_0} \sin(\alpha_0)$; $\dot{\vartheta}$, vitesse angulaire, est mesurée en radians par seconde.

Instant quelconque

On note M une position quelconque du mobile (dans le demi-plan supérieur).

On note ϑ l'angle $(\Omega x, \Omega M)$. On a $\vartheta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$, d'où $\dot{\vartheta} = \frac{1}{x^2 + y^2}(x\dot{y} - y\dot{x})$.

On rappelle (voir [1]) que, dans un mouvement à force centrale, le rayon vecteur balaye des aires égales en des temps égaux ; la constante des aires, notée C_{aire} vaut :

$C_{aire} = r_0^2 \dot{\vartheta}_0 = r_0 V_0 \sin(\alpha_0)$ (en m^2 / s).

En coordonnées cartésiennes, on a les équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \gamma_x = \gamma \cos(\vartheta) \\ \ddot{y} = \gamma_y = \gamma \sin(\vartheta) \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} \ddot{x} = \dfrac{\gamma x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \ddot{y} = \dfrac{\gamma y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations, il sera commode de travailler en coordonnées polaires, centrées au centre de la Terre.

C. *Approche en coordonnées polaires*

Soit M_0 la position initiale du mobile ; on prend pour axe de référence Ωx l'axe ΩM_0 et on note $\vec{i}$ le vecteur unitaire de cet axe.

Soit M le point représentant le mobile ; on note ϑ l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\Omega M_0}, \overrightarrow{\Omega M}\right)$ et r la distance $r = \Omega M$. On note $\vec{j}$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{i}$, dans le sens direct. Le repère $\left(\Omega, \vec{i}, \vec{j}\right)$ est fixe.

Dans ce repère, on peut écrire $x = r\cos(\vartheta), y = r\sin(\vartheta)$.

$$\overrightarrow{\Omega M} \ : \begin{cases} x = r\cos(\vartheta) \\ y = r\sin(\vartheta) \end{cases}$$

Les coordonnées cartésiennes de la vitesse sont (avec la notation $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$) :

$$\dot{x} = \dot{r}\cos(\vartheta) - r\sin(\vartheta)\dot{\vartheta},\ \dot{y} = \dot{r}\sin(\vartheta) + r\cos(\vartheta)\dot{\vartheta}.$$

et donc :

$$\vec{V} : \begin{cases} \dot{x} = \dot{r}\cos(\vartheta) - r\sin(\vartheta)\dot{\vartheta} \\ \dot{y} = \dot{r}\sin(\vartheta) + r\cos(\vartheta)\dot{\vartheta} \end{cases}$$

La vitesse radiale est la composante de $\vec{V}$ portée par $\overrightarrow{\Omega M}$; elle vaut :

$$V_{rad} = \frac{\vec{V} \cdot \overrightarrow{\Omega M}}{\left\|\overrightarrow{\Omega M}\right\|} = \frac{\left(\dot{r}\cos(\vartheta) - r\sin(\vartheta)\dot{\vartheta}\right) r\cos(\vartheta) + \left(\dot{r}\sin(\vartheta) + r\cos(\vartheta)\dot{\vartheta}\right) r\sin(\vartheta)}{r}$$
$$= \frac{\dot{r}r\cos^2(\vartheta) + \dot{r}r\sin^2(\vartheta)}{r} = \dot{r}$$

Soit α l'angle $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \vec{V}\right)$. On a, en notant $V = \left\|\vec{V}\right\|$:

$$\dot{r} = V\cos(\alpha),$$

et en particulier au moment initial, comme nous l'avons vu plus haut :

$\dot{r}_0 = V_0 \cos(\alpha_0)$.

On introduit les vecteurs unitaires $\vec{e_1}$ porté par $\overrightarrow{M\Omega}$ et $\vec{e_2}$ perpendiculaire ; ils ont respectivement pour composantes (dans le repère cartésien fixe) :

$$\begin{cases} \vec{e_1} : (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta)) \\ \vec{e_2} : (-\sin(\vartheta), \cos(\vartheta)) \end{cases}$$

Le repère $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ est mobile, centré en M. Le vecteur $\vec{e_1}$ est dirigé vers Ω.
La vitesse tangentielle $V_{\tan}$ est perpendiculaire au vecteur $\overrightarrow{\Omega M}$, donc portée par $\vec{e_2}$.
$\overrightarrow{\Omega M} = r\vec{e_1}$, donc $\vec{V} = \dot{r}\vec{e_1} + r\dfrac{d\vec{e_1}}{dt} = \dot{r}\vec{e_1} + r\dfrac{d\vec{e_1}}{d\vartheta}\dfrac{d\vartheta}{dt} = \dot{r}\vec{e_1} + r\vec{e_2}\dot{\vartheta}$.

La vitesse tangentielle est donc $V_{\tan} = r\dot{\vartheta}$. Elle se mesure en m/s.

Il ne faut pas la confondre avec la vitesse de rotation de la demi-droite ΩM, qui est simplement $\dot{\vartheta}$, en radians par seconde.

Pour calculer l'accélération, on dérive le vecteur vitesse par rapport au temps ; on trouve :

$\gamma_{rad} = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2$, $\gamma_{\tan} = r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}$.

On sait que dans le cas d'une force centrale :

$r^2\dot{\vartheta} = C_{aire} = cste$ avec $C_{aire} > 0$ si le mobile tourne dans le sens trigonométrique. On a vu plus haut que :

$C_{aire} = r_0^2\dot{\vartheta}_0 = r_0 V_0 \sin(\alpha_0)$.

On a $C_{aire} > 0$ sauf dans les cas extrêmes vus plus haut : vitesse initiale orientée selon l'axe Ωx.
Dans la suite, nous nous plaçons dans le cas où la vitesse initiale n'est pas selon l'axe Ωx.

II. Résolution

En dérivant par rapport au temps, on obtient :

$2r\dot{r}\dot{\vartheta} + r^2\ddot{\vartheta} = 0$,

ce qui implique que $\gamma_{\tan} = 0$. La seule accélération est radiale.

Comme l'accélération est constante, on a :

$$\gamma_{rad} = \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 = \gamma = cste,$$

et comme $\dot{\vartheta} = \dfrac{C_{aire}}{r^2}$,

$$\ddot{r} - \frac{C_{aire}^2}{r^3} = \gamma < 0 \ :$$

Puisque le mobile se dirige vers le centre, $\gamma < 0$. On remarque que le mobile tourne de plus en plus vite lorsque $r \to 0$.

On en déduit :

$$\ddot{r}\dot{r} - \frac{C_{aire}^2}{r^3}\dot{r} = \gamma\dot{r}$$

et en intégrant par rapport au temps :

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C_{aire}^2}{r^2} = \gamma r + C_0 \ \ (1)$$

où C_0 dépend des conditions initiales. On écrit pour l'instant initial :

$\dfrac{1}{2}\dot{r}_0^2 + \dfrac{1}{2}\dfrac{C_{aire}^2}{r_0^2} = \gamma r_0 + C_0$, où $\dot{r}_0$ désigne la vitesse radiale à l'instant initial. On a :

$$C_0 = \frac{1}{2}\dot{r}_0^2 + \frac{1}{2}\frac{C_{aire}^2}{r_0^2} - \gamma r_0 \ \ (2)$$

Par différence (1)-(2) :

$$\dot{r}^2 - \dot{r}_0^2 = C_{aire}^2\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right) + 2\gamma\left(r - r_0\right) \ \ (3)$$

avec $C_{aire} = r_0^2\dot{\vartheta}_0 = r_0 V_0 \sin\left(\alpha_0\right) > 0.$ Comme $\gamma < 0,$ on a $C_0 > 0$.

Les deux termes $2\gamma\left(r - r_0\right)$ et $\dfrac{1}{r_0^2} - \dfrac{1}{r^2}$ se comportent en sens opposé : si $r < r_0$, le premier est positif et le second négatif.

C'est le carré $\dot{r}_0^2$ qui intervient, alors que $\dot{r}_0$ peut être positif ou négatif, et le mouvement ne sera pas le même dans les deux cas. La constante des aires C_{aire} dépend des conditions initiales.

III. Conclusions

Une première conclusion est que le mouvement ne peut atteindre l'origine :

Proposition 2. - *Pour tout* r, *on a :* $r > \dfrac{C_{aire}}{\sqrt{2C_0}}$.

Démonstration de la Proposition 2. - On a :

$$C_0 = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C_{aire}^2}{r^2} - \gamma r > 0,$$

a fortiori :

$C_0 > \dfrac{1}{2}\dfrac{C_{aire}^2}{r^2}$ puisque $\gamma < 0$. Il en résulte :

$$r > \frac{C_{aire}}{\sqrt{2C_0}},$$

ce qui prouve la Proposition.

A l'inverse, le mouvement ne peut s'étendre à l'infini :

Proposition 3. – *Le rayon est borné supérieurement :* $r < \dfrac{C_0}{-\gamma}$.

Démonstration de la Proposition 3. - On sait que :

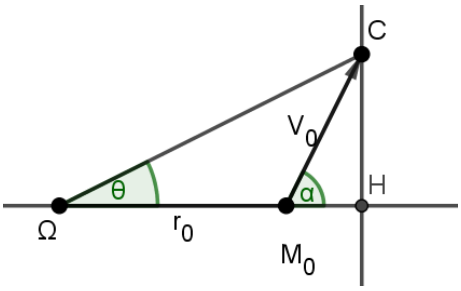
$$\dot{r}^2 = 2C_0 + 2\gamma r - \frac{C_{aire}^2}{r^2},$$

donc :

$$2C_0 + 2\gamma r - \frac{C_{aire}^2}{r^2} > 0,$$

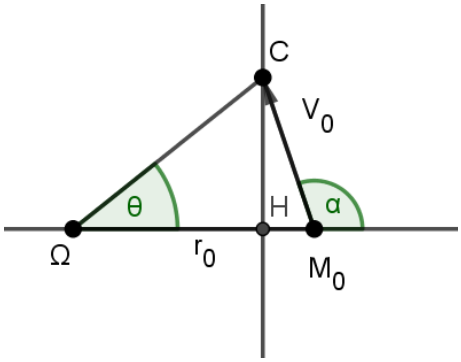
donc $C_0 + \gamma r > 0$ et $r < \dfrac{C_0}{-\gamma}$, ce qui prouve la Proposition 2. Il en résulte qu'il est impossible que $r \to +\infty$. Ceci est très intuitif : comme la force centrifuge est constante quelle que soit la distance, le mobile ne peut jamais s'échapper, quelle que soit sa vitesse initiale, à la différence de

ce qui se passe si le champ de pesanteur est en $1/d^2$: en ce cas, une vitesse initiale suffisante permet de s'échapper.



Selon la vitesse initiale, il y a deux cas :

- Cas 1. - La vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$, en projection sur Ωx, est dirigée vers la droite, $\alpha < \frac{\pi}{2}$: la distance ΩM, notée r, commence par augmenter et diminue ensuite ;



Cas 2. - La vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$, en projection sur Ωx, est dirigée vers la gauche, $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$: la distance ΩM, notée r, diminue dès le début du mouvement.

Dans le cas intermédiaire $\alpha = \frac{\pi}{2}$, le diagramme des forces montre que le déplacement se fait vers la gauche de M_0.

Cas 1 : la vitesse initiale est dirigée vers le haut et la droite

Comme l'accélération est dirigée vers l'origine Ω, la position suivante sera nécessairement à gauche du vecteur $\overrightarrow{V_0}$; autrement dit, l'angle α ne peut qu'augmenter.

La vitesse tangentielle est $V_{\tan} = r\dot{\vartheta} = \frac{C_{aire}}{r}$

Si on admet la décomposition du mouvement en deux :

1) Sous l'action de l'attraction : $r = \frac{1}{2}\gamma t^2 + r_0$: mouvement sur l'axe des x, accélération constante $\gamma < 0$, donc vitesse $V = \gamma t$, nulle à l'instant initial, dirigée vers l'origine.

2) Vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ dirigée vers le haut et la droite, donc projection $V_{0,x}$ sur Ωx constante et positive.

La combinaison des deux aura une vitesse initiale égale à $V_{0,x}$ dirigée vers la droite. Autrement dit, r va augmenter.

Comme $\dot{\vartheta} = \frac{C_{aire}}{r^2}$, $\dot{\vartheta}$ va diminuer : la rotation sera de moins en moins rapide.

On peut constater cela d'une autre manière, en écrivant les équations :

$$\left\|\vec{V}\right\|^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 = \dot{r}^2 + \frac{C_{aire}^2}{r^2}$$

$$\left\|\vec{V}\right\|^2 - \left\|\vec{V_0}\right\|^2 = \dot{r}^2 - \dot{r}_0^2 + \frac{C_{aire}^2}{r^2} - \frac{C_{aire}^2}{r_0^2} = -2\gamma\left(r_0 - r\right)$$

est du signe de $r_0 - r$.

Si $r < r_0$, $\left\|\vec{V}\right\| > \left\|\vec{V_0}\right\|$: la vitesse augmente ; si $r > r_0$, $\left\|\vec{V}\right\| < \left\|\vec{V_0}\right\|$: la vitesse diminue.

L'altitude maximale est obtenue lorsque la vitesse initiale est dirigée vers la droite et selon l'axe Ωx.

Cas 2 : la vitesse initiale est dirigée vers le haut et la gauche

L'angle α est initialement $> \frac{\pi}{2}$ et ne peut qu'augmenter.

Le produit scalaire $\vec{V} \cdot \overrightarrow{M\Omega} = \left(\dot{r}\vec{e_1} + r\vec{e_2}\dot{\vartheta}\right) \cdot \left(-r\vec{e_1}\right) = -r\dot{r}$

ceci montre bien que la limite est un cercle : à la limite, $\dot{r} = 0$, donc $\vec{V} \perp \overrightarrow{M\Omega}$.

Calculons le produit scalaire :

$$\begin{aligned}\vec{V} \cdot \vec{\gamma} &= \left(\dot{r}\vec{e_1} + r\dot{\vartheta}\vec{e_2}\right) \cdot \left(\left(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2\right)\vec{e_1} + \left(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}\right)\vec{e_2}\right) = r\left(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2\right) + r\dot{\vartheta}\left(r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta}\right) \\ &= r\ddot{r} - r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + 2r\dot{r}\dot{\vartheta}^2 = r\ddot{r} + r^2\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + r\dot{r}\dot{\vartheta}^2 = r\left(\ddot{r} + r\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + \dot{r}\dot{\vartheta}^2\right)\end{aligned}$$

à la limite, $\dot{r} \to 0$ donc $\ddot{r} \to 0$. Aussi, $\dot{\vartheta} \to cste$, donc $\ddot{\vartheta} \to 0$ et $\vec{V} \cdot \vec{\gamma} \to 0$: l'accélération et la vitesse sont orthogonales.

$$\vec{V} \cdot \vec{\gamma} = r\left(\ddot{r} + r\dot{\vartheta}\ddot{\vartheta} + \dot{r}\dot{\vartheta}^2\right)$$

$$\dot{\vartheta} = \frac{C_{aire}}{r^2},\ \ddot{\vartheta} = -\frac{2C_{aire}\dot{r}}{r^3}$$

$$\vec{V} \cdot \vec{\gamma} = r\left(\ddot{r} - \frac{2C_{aire}^2\,\dot{r}}{r^4} + \frac{\dot{r}C_1^2}{r^4}\right) = r\left(\ddot{r} - \frac{C_{aire}^2\,\dot{r}}{r^4}\right)$$

Calculons la norme de $\vec{V}$:

$$\left\|\vec{V}\right\|^2 = \dot{r}^2 + \left(r\dot{\vartheta}\right)^2 = \dot{r}^2 + \frac{C_{aire}^2}{r^2} \to \frac{C_{aire}^2}{r_{\lim}^2}$$

Comme :

$$\dot{r}^2 = \dot{r}_0^2 - 2\gamma\left(r_0 - r\right) + C_{aire}^2\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r^2}\right)$$

On obtient :

$$\left\|\vec{V}\right\|^2 = -2\gamma\left(r_0 - r\right) + \frac{C_{aire}^2}{r_0^2} + \dot{r}_0^2$$

ou encore, en tenant compte de l'expression initiale pour C_{aire} :

$$\left\|\vec{V}\right\|^2 = -2\gamma\left(r_0 - r\right) + V_0^2\sin^2\left(\alpha_0\right) + \dot{r}_0^2$$

Le carré de la vitesse augmente linéairement à mesure que r diminue.

Si la vitesse initiale est dirigée vers la droite, r commence par augmenter et la vitesse sera nulle lorsque :

$$r - r_0 = \frac{V_0^2\sin^2\left(\alpha_0\right) + \dot{r}_0^2}{-2\gamma}$$

IV. Valeur limite

Dans les deux cas, le mouvement admet un mouvement limite :

Proposition 4. – *Le mouvement limite est un mouvement circulaire, dont le rayon* $r_{\lim}$ *est donné par la plus petite racine positive de l'équation :*

$$\dot{r}_0^2 = C_{aire}^2\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r_0^2}\right) + 2\gamma\left(r_0 - r\right) \quad (4)$$

qui s'écrit encore :

$$V_0^2 = \frac{r_0^2 V_0^2\sin^2\left(\alpha_0\right)}{r^2} + 2\gamma\left(r_0 - r\right) \quad (5)$$

La vitesse angulaire est :

$$\dot{\vartheta}_{\lim} = \frac{C_{aire}}{r_{\lim}^2}.$$

Démonstration de la Proposition 4. – On sait que le rayon ne peut que diminuer et qu'il est borné inférieurement. Il suffit de passer à la limite dans la formule (4) : le rayon tend vers $r_{\lim}$ et la vitesse radiale $\dot{r} \to 0$.

Il est évident que l'équation (5) admet une unique racine positive. Ecrivons-la sous la forme :

$$V_0^2\left(1-\frac{r_0^2\sin^2(\alpha_0)}{r^2}\right) = 2\gamma(r_0 - r).$$

Le terme de gauche est croissant en r, le terme de droite décroissant. Pour $r = 0$, le terme de gauche vaut $-\infty$ et celui de droite vaut $2\gamma r_0$. ; en r_0, le terme de gauche vaut $V_0^2\cos^2(\alpha_0)$ et celui de droite 0.

La formule (5) s'écrit sous la forme d'une équation du troisième degré en r :

$$2\gamma r^3 + \left(V_0^2 - 2\gamma r_0\right)r^2 - r_0^2 V_0^2 \sin^2(\alpha_0) = 0 \text{ . (6)}$$

Elle se réduit à une équation du second degré si la vitesse initiale est perpendiculaire à ΩM_0, puisque $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, on a $\dot{r}_0 = 0$ dans (4) et $r = r_0$ est une solution de l'équation :

$$2\gamma r^3 + \left(V_0^2 - 2\gamma r_0\right)r^2 - r_0^2 V_0^2 = 0$$

qui s'écrit :

$$(r - r_0)\left(2\gamma r^2 + V_0^2 r + V_0^2 r_0\right) = 0$$

La racine positive est :

$$r_{\lim} = \frac{V_0^2 + V_0\sqrt{V_0^2 - 8\gamma r_0}}{-4\gamma}.$$

V. En résumé

La distance $r = \Omega M$ est solution d'une équation différentielle :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = r_0^2 V_0^2 \sin^2(\alpha_0)\left(\frac{1}{r_0^2} - \frac{1}{r(t)^2}\right) - 2\gamma\left(r_0 - r(t)\right) + \dot{r}_0^2$$

La vitesse angulaire est donnée par la relation :

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{r_0 V_0 \sin(\alpha_0)}{r(t)^2}$$

Si la vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ est dirigée vers le haut et la droite, le mobile commence par s'éloigner du centre de la Terre, puis il se rapproche et la trajectoire finale est asymptotiquement un cercle.

Si la vitesse initiale $\overrightarrow{V_0}$ est dirigée vers le haut et la gauche, le mobile se rapproche constamment du centre de la Terre et la trajectoire finale est asymptotiquement un cercle.

Dans tous les cas, le rayon de ce cercle dépend fondamentalement des conditions initiales, ce qui peut être considéré comme très étonnant.

VI. Références

[1] L'ellipse et ses mystères :
https://www.scmsa.eu/archives/BB_ellipse_mysteres.pdf

[2] Discrétisation d'un mouvement : une approche incorrecte :
https://www.scmsa.eu/archives/BB_erreur_discretisation_mouvement_2025_04.pdf