Société de Calcul Mathématique SA
Outils d'aide à la décision
depuis 1995

Les mathématiques savent-elles décrire les lois de la Nature ?

Bernard Beauzamy

août 2025

Newsletter "Mathématiques du Réel"

La plupart des gens diront : "question absurde : elles sont faites pour cela". A l'origine, certainement : c'était la préoccupation des anciens Grecs ; voir à ce propos l'excellent livre d'Arthur Koestler "Les Somnambules" (1959) [1]. Mais, au fur et à mesure que les siècles passaient, les mathématiques ont surtout adressé des problèmes issus des mathématiques elles-mêmes ; personne, par exemple, ne peut dire que la conjecture de Riemann (position des zéros de la fonction Zeta) ait quoi que ce soit à voir avec une loi de la Nature.

Aujourd'hui, en France, la majorité des mathématiciens du monde académique s'occupe de problèmes issus du formalisme mathématique lui-même, sans aucun lien avec une préoccupation relevant des lois de la Nature. Il y a deux raisons à cela :

- Les problèmes issus du formalisme sont bien posés et la communauté récompense ceux qui s'y attaquent ;

- On ne sait pas comment aborder les problèmes posés par la Nature !

Indépendamment de cet aspect sociologique, la question demeure : les mathématiques existantes décrivent-elles correctement les lois de la Nature ? La réponse est : dans l'ensemble, certainement pas. Mais elle mérite d'être nuancée : dans certains cas, nous n'avons pas les bons outils ; dans d'autres, nous les avons, mais ne savons pas les utiliser. Il y a quelques rares cas où les solutions sont satisfaisantes.

D'apparition plus récente, les probabilités (Laplace, Théorie analytique des probabilités, 1812 [2]) sont encore mal assimilées, mal comprises ; paradoxalement, pourtant, elles fournissent les réponses les plus satisfaisantes.

I. Ce que nous ne savons pas faire

Les lois de la Nature sont toujours extrêmement complexes : elles ne sont jamais linéaires et jamais continues, au sens où nous entendons ces mots en mathématiques usuelles. La notion de coordonnées nous est familière depuis des centaines d'années et nous ne saurions pas nous en passer. Pourtant, nulle part la Nature ne fait appel à des coordonnées, et elle résout au quotidien des problèmes que nous ne savons pas résoudre.

L'apparition de l'informatique conduit à discrétiser les problèmes (on suppose les lois linéaires ou constantes sur de petits intervalles de temps et d'espace) et on résout, par des moyens informatiques, le problème ainsi discrétisé.

Là encore, sur le plan intellectuel, il s'agit d'une régression. La Nature ne discrétise rien et ne linéarise rien.

Cela pose un grand nombre de problèmes pratiques ; le premier d'entre eux étant : comment gérer les incertitudes, soit sur les données, soit sur les lois ? Mais ces méthodes se sont progressivement imposées au cours des 50 dernières années, si bien que les spécialistes ne peuvent pas concevoir que l'on puisse faire autrement.

La Nature s'accommode fort bien des incertitudes : elle parvient à maintenir la Lune sur son orbite, depuis des milliards d'années, alors qu'en théorie elle devrait l'avoir quittée depuis longtemps, du fait de l'impact d'innombrables météorites. De manière générale, nous ne comprenons pas comment le système solaire peut être stable, alors que les mathématiques assurent qu'il ne l'est pas.

Si on revient aux situations les plus simples, on se rend compte que nos mathématiques sont largement inefficaces : on ne sait pas prédire l'évolution de trois corps laissés seuls dans l'espace, ni calculer explicitement le périmètre d'une ellipse. Or la Nature sait faire évoluer les trois corps et sait déformer l'ellipse pour en faire un cercle, à périmètre constant (il suffit de la gonfler).

Une question fondamentale, que les mathématiciens n'aiment pas aborder, est celle de la "nécessité" de nos mathématiques. Pour Von Neumann, elles ne seraient qu'un accident historique, se développant au fil des modes, comme le latin a donné naissance à plusieurs langues contemporaines. L'exemple frappant qu'il donne, en dernière phrase de son livre "The Computer and the Brain" (1955) [3] est que le système de notation du cerveau humain "cannot fail to differ considerably from what we know as mathematics". Autrement dit, la manière dont le cerveau humain traite l'information est fondamentalement différente de nos mathématiques.

Le responsable de la R&D dans une grande entreprise industrielle me faisait un jour cette remarque : un joueur de tennis est capable de renvoyer la balle, dans des conditions d'angle et d'éclairement peu favorables, mais son cerveau ne résout pas un système d'équations aux dérivées partielles.

La connaissance que nous avons des lois de la physique est très empirique ; les lois de Kepler sont manifestement approximatives et la formule de l'attraction universelle manifestement fausse ; même ainsi, nous ne parvenons pas à résoudre les problèmes concrets, une fois qu'ils sont mis sous forme mathématique.

Le livre de Von Neumann "The Computer and the Brain" [3] n'a pas eu la descendance qu'il méritait. Il a été publié sous la forme des "Silliman Lectures", conférence qu'il n'a pas pu prononcer (il est mort avant). Le livre est victime d'un contresens complet dans la traduction française. S'y rattache le livre de Connes-Changeux "Matière à pensée" [4], pour lequel on peut citer Baudelaire "néant follement attifé". Ce livre ne mentionne même pas Von Neumann.

Nous-même avons voulu travailler dans la direction indiquée par Von Neumann : quel est le système de notation utilisé par le cerveau humain ? en d'autres termes, comment le cerveau humain stocke-t-il et traite-t-il l'information recueillie ? Nous l'avons fait dans le cadre d'un groupe de travail organisé par le Ministère de la Défense, qui s'intéressait à ces questions à l'époque, voir [5]. Nous n'avons jamais réussi à faire publier nos conclusions ; à chaque soumission, nous recevions la réponse : le referee n'a pas le niveau suffisant en mathématiques pour comprendre les résultats de l'article.

Le livre de Von Neumann "The Computer and the Brain" a eu une descendance qu'il ne méritait pas, à savoir les réseaux de neurones et, plus récemment, l'intelligence artificielle, qui occupe actuellement des millions de pseudo-scientifiques ; ils y voient une opportunité pour se donner de l'importance. Comme disait Boileau : "Et d'un tronc fort illustre une branche pourrie".

II. Ce que nous pourrions mieux faire

Prenons un problème pratique : ranger des containers à bord d'un navire porte-containers. Les contraintes sont nombreuses ; les objectifs sont multiples et largement contradictoires. Une approche consistant à dire : je fais la liste des contraintes et j'optimise une fonction coût (approche habituelle) ne peut qu'échouer, parce que les objectifs ne se laissent pas traduire en termes de coûts : ceux-ci sont factices. En outre, le donneur d'ordre a plusieurs souhaits, qui sont contradictoires ; or, en mathématiques, on ne peut optimiser qu'une seule chose à la fois.

Une approche possible, non utilisée à ce jour, consisterait à utiliser la méthode d'Archimède (méthode de pesée, ou de comparaison) : on se dote d'une bibliothèque de répartitions de containers, obtenue grâce à un historique, et on part de la situation ancienne la plus proche de la situation présente ; on la modifie pour répondre au mieux à la demande.

On voit bien ici toute la différence : dans le premier cas, disposer de moyens de calcul très performants, capables de traiter les données présentes de manière quasi-instantanée ; dans le second cas, avoir été capable de mettre les expériences passées sous forme d'une bibliothèque réutilisable.

III. Ce que nous savons faire

On peut dire, très grossièrement, que nous avons les moyens techniques pour résoudre de très gros systèmes d'équations aux dérivées partielles, après discrétisation et linéarisation. Cela convient bien pour résoudre les problèmes physiques simplifiés, par exemple calculer la trajectoire d'une sonde spatiale ou le débit d'un gaz d'une canalisation. Cela ne répond pas aux lois de la Nature, mais cela répond aux besoins de la civilisation et il faut s'en réjouir. L'exemple le plus frappant est peut-être donné par les constellations de satellites GPS ; le positionnement par satellite est "bourré de mathématiques" si l'on ose dire, et ces mathématiques sont fascinantes. Nous renvoyons au livre de Pascal Willis & al. "GPS. Localisation et Navigation" [6].

C'est très justement que la communauté mathématique assure que tous les équipements que nous utilisons aujourd'hui sont "bourrés de mathématiques" ; ils ne pourraient pas exister sans des théories comme la transformation de Fourier, etc. Cela étant, ces mathématiques ne représentent pas une compréhension satisfaisante des lois de la Nature et, par ailleurs, la part que les mathématiciens eux-mêmes ont prise à ces développements est souvent très faible : ils sont l'œuvre d'ingénieurs ou de physiciens.

Le seul cas où nous y parvenions est celui des Probabilités : cela sera perçu comme très étonnant par beaucoup.

L'origine des probabilités se perd dans la nuit des temps : les Phéniciens savaient calculer une assurance pour la cargaison de leurs navires. De nos jours, on fait remonter la création "académique" au livre de Laplace, mentionné plus haut.

Je ne parlerai ici que des probabilités "macroscopiques" et non de la mécanique quantique, qui semble fondamentalement probabiliste. La modélisation initiale (de type hilbertien) est due à Von Neumann et elle est très contestable. Les expériences faites depuis sont largement incompréhensibles et il n'est pas du tout certain que la théorie des probabilités, telle que nous la connaissons, s'applique correctement à l'échelle de la mécanique quantique. En revanche, la théorie des probabilités "macroscopiques" décrit parfaitement les lois de la Nature, mieux que ne le ferait aucun système d'équations aux dérivées partielles. Je vais illustrer ceci par un exemple très simple et très frappant.

Chacun connaît les axiomes de la théorie des probabilités ; ils sont enseignés un peu partout (plutôt mal, à vrai dire !). Un concept essentiel est celui d'indépendance, rarement bien compris. Deux événements sont indépendants si la connaissance de l'un n'apporte aucune information à propos de l'autre. Cela ne se réduit pas au fait que l'un n'influe pas sur l'autre ! Deux exemples :

- Ouvrir un parapluie et porter un imperméable ne sont pas indépendants : les deux se produisent lorsqu'il pleut ;

- Le débit de la Volga (hémisphère nord) et celui du rio de la Plata (hémisphère sud) ne sont pas indépendants : si l'un est fort, on est au printemps et l'autre sera faible (on est en automne). Pourtant la Volga ne se déverse pas dans le rio de la Plata, ni l'inverse !

La situation la plus simple de variables aléatoires indépendantes de même loi est celle du jeu de pile ou face : probabilité =1/2 dans chaque cas, et il est raisonnable d'admettre que la connaissance d'un nombre quelconque de résultats ne donne aucune information sur les suivants. Le jeu de pile ou face peut se pratiquer n'importe où, y compris la planète Mars, pourvu que la gravitation existe : on peut donc dire :

- Que la loi est parfaitement bien définie sur le plan axiomatique ;

- Qu'il s'agit d'une loi de la Nature, dont chacun peut faire l'expérience.

On peut programmer un jeu de pile ou face : en Visual Basic, par exemple, il existe une fonction rnd() qui renvoie un nombre aléatoire selon une loi uniforme entre 0 et 1 ; il suffit de décider pile si X<1/2 et face si X>1/2, voir en fin d'article un petit programme.

C'est, à notre connaissance, l'unique situation où une loi de la Nature se laisse définir de manière axiomatique. On s'intéresse ici au gain de chaque joueur : à la $n^{ème}$ partie, il est défini par :

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n,$$

où $X_n = \pm 1$ désigne le gain du joueur A à la $n^{ème}$ partie. En langage commun, à chaque partie, celui qui perd donne un Euro à celui qui gagne, et on fait la somme sur l'ensemble des parties jouées. La fortune initiale n'intervient pas ; bien entendu, S_n peut être négatif.

La plupart des gens croient, à tort, que $S_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$; ils y voient à tort une traduction de la loi des grands nombres. C'est vrai pour la moyenne S_n / n, mais pas pour S_n. La loi de la Nature est que S_n subira, lorsque n augmente, des oscillations de plus en plus fortes. En d'autres termes, si vous jouez à ce jeu, viendra nécessairement un moment où vous gagnerez un milliard d'Euros et viendra nécessairement un moment (peut-être avant, peut-être après) où vous aurez perdu un milliard d'Euros. C'est très peu intuitif.

L'énoncé précis est absolument fascinant ; il est dû au mathématicien russe Alexandre Khintchine (1924), https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_du_logarithme_itéré :

$$\textit{presque sûrement}, \limsup \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log(n)}} = 1$$

$$\textit{presque sûrement}, \liminf \frac{S_n}{\sqrt{2n \log\log(n)}} = -1$$

Transcrivons ceci en langage plus simple :

Si vous jouez à pile ou face et si S_n désigne votre gain à la $n^{ème}$ partie, vous êtes pratiquement certain que votre gain, ou votre perte, seront bornés par la courbe de Khintchine d'équation $y = \sqrt{2x \log\log(x)}$; mais, inversement, vous êtes pratiquement certain que cette valeur du gain ou de la perte seront atteints à un moment où à un autre.

A la difficulté technique s'ajoute cette difficulté de compréhension : que signifie "presque sûrement" ?

Cela signifie que si un grand nombre de joueurs (disons un milliard) s'adonnent à ce jeu, une large proportion observera le phénomène décrit plus haut et cette proportion sera d'autant plus large que le nombre de joueurs sera plus élevé (dix milliards au lieu d'un milliard).

La démonstration de Khintchine est extrêmement difficile. J'ai essayé de la simplifier et de la renforcer dans mon livre "Simple Random Walks" [7].

Ce résultat est absolument fascinant : on part d'une situation très simple, le jeu de pile ou face, et on se retrouve devant une loi de la Nature d'une effrayante complexité, avec cette courbe de Khintchine qui ne semble pas naturelle et qui l'est pourtant et cet énoncé "presque sûr" qui est assurément peu intuitif.

Je reviens sur ce que j'ai dit plus haut : la loi du logarithme itéré est valable pour le jeu de pile ou face, c'est-à-dire à un niveau macroscopique. Il n'y a aucune raison de supposer qu'une telle loi puisse être valable au niveau de la mécanique quantique : nous n'en savons absolument rien.

Comparons ceci à la théorie de la relativité : les deux sont à peu près contemporaines (la relativité est légèrement plus ancienne). La relativité est largement enseignée et acceptée, tandis que personne n'enseigne ni ne comprend le résultat de Khintchine. Les deux décrivent une loi de la Nature. Les vérifications de la relativité sont difficiles et requièrent un appareillage spécialisé. Les vérifications de Khintchine sont élémentaires et à la portée de quiconque possède une pièce de monnaie. La relativité n'est qu'une théorie, susceptible d'évolution (il y a la relativité restreinte, puis la relativité générale, et il y aura un jour ou l'autre une version quantique). Le résultat de Khintchine, à l'inverse, est un théorème : il est démontré et c'est une certitude. On peut tout au plus le préciser et en simplifier la démonstration ; c'est ce qui est fait dans [7].

IV. En conclusion

Dans l'ensemble, les probabilités sont mal comprises, mal appréciées et mal enseignées. L'enseignement est fait sous forme de doctrines académiques et le lien avec les lois de la Nature n'apparaît pas.

Les ingénieurs aiment bien calculer de manière précise ; pour eux, 18 chiffres après la virgule sont mieux que 17, même si les données ne sont connues qu'à 20% près. Ils acceptent à la rigueur des lois de probabilité toutes faites (loi de Gauss, loi de Gumbel, etc.), mais c'est pour revenir aussitôt à une description déterministe qui leur permet de mener à bien les calculs numériques.

L'époque est aux certitudes de toute nature, notamment en ce qui concerne les "plans climat" ; une théorie scientifique qui s'attache à prendre en compte les incertitudes est certainement mal venue. De manière générale, et sans crainte d'erreur, on peut assurer que toute institution (publique ou privée) qui dispose d'un plan climat sera hostile par principe aux probabilités. Le plan climat dit "il faut agir d'urgence" ; les probabilités disent "les lois de la Nature sont très complexes".

Cela ne signifie pas que tout progrès soit impossible. Il faut parvenir à prendre du recul par rapport aux modes de pensée usuels (coordonnées cartésiennes, etc.), mais l'exemple du début du 20ème siècle a montré que des chercheurs isolés y parvenaient.

Les scientifiques commencent à admettre le fait que les lois de la Nature ne sont pas simples ; il a fallu des siècles pour comprendre que les orbites des planètes n'étaient pas circulaires, mais elliptiques. La Théorie de la Relativité est maintenant bien acceptée comme décrivant une loi de la Nature et, tôt ou tard, il en sera de même avec les Probabilités.

V. Références

[1]. Arthur Koestler : "Les Somnambules", Calmann-Lévy, 1960

[2]. Pierre-Simon Laplace : "Théorie analytique des probabilités", 1812

[3]. John Von Neumann : 'The Computer and the Brain", Silliman Lectures 1958
https://en.wikipedia.org/wiki/The_Computer_and_the_Brain

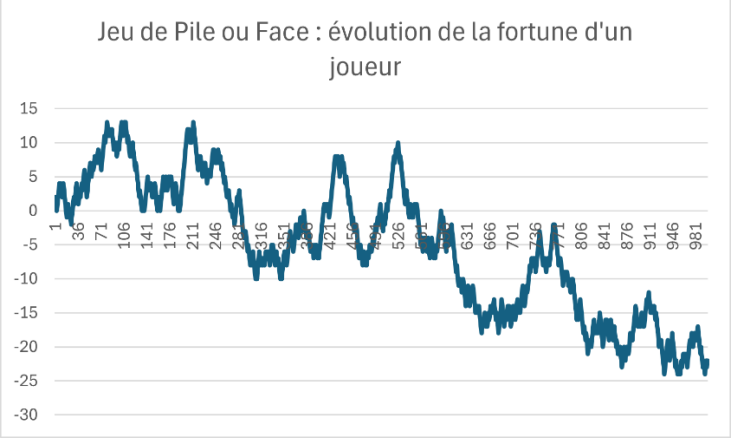
[4]. Jean-Pierre Changeux, Alain Connes : "Matière à pensée", Editions Odile Jacob, 1989

[5]. Bernard Beauzamy & al : "Neural Code in the Human Brain: The Dynamical Coding Hypothesis", 1997
https://scmsa.eu/archives/BB_neurons_1997.pdf

[6]. Pascal Willis, Serge Botton, Françoise Duquenne, Yves Egels, Michel Even : "GPS. Localisation et Navigation", Hermès Science Publications, 1996

[7]. Bernard Beauzamy : "Simple Random Walks", éditions de la SCM, 2020
https://www.scmsa.eu/livres/SCM_SRW_order.htm

Programme VBA ayant servi à générer ce graphe




```
Option Explicit
Sub macro1()
Dim x As Double
Randomize
Dim Ntot As Integer
Dim Sum As Integer
Ntot = 1000
Dim n As Integer
For n = 1 To Ntot
x = Rnd()
If x < 1 / 2 Then x = -1
If x > 1 / 2 Then x = 1
If x = 1 / 2 Then x = 0
Sum = Sum + x
Sheets(1).Cells(n, 1) = Sum
Next n

End Sub
```