



Mauvaise utilisation des codes de calcul :

les dangers d'une exploration aléatoire

*Mises en garde à destination des ingénieurs*

par Bernard Beauzamy

mai 2026

## Résumé opérationnel

*Où l'on découvre que l'incompétence militante des uns se nourrit de la béatitude ensommeillée des autres.*

Il y a quelques années, un Conseil Général nous a transmis un document fascinant : une digue construite grâce à des codes de calcul, après une étude probabiliste fort bien faite, portant sur de nombreux paramètres : durée de retour de crues, de pluies, résistance des sols, des matériaux, etc. Le document fait 200 pages, plus les annexes, et est bourré de schémas, de diagrammes : c'est très beau. Seul petit problème : la digue s'est rompue le jour même de la mise en eau, devant une crue très ordinaire.

Juridiquement, le Conseil Général est assez démuni : le maître d'œuvre n'a jamais dit que la digue ne s'effondrerait pas ; il a démontré qu'elle ne s'effondrerait qu'avec une probabilité de  $10E(-7)$ , ce qui n'est pas la même chose. L'incompétence des uns se nourrit de la béatitude ensommeillée des autres.

Si on veut utiliser des codes de calcul dépendant de nombreux paramètres, il faut de solides connaissances sur la géométrie des espaces de grande dimension. La plupart des calculs, utilisant des méthodes de type Monte-Carlo, ne sont pas seulement incorrects sur le plan de la logique : ils donnent des résultats radicalement faux. La paresse intellectuelle fait qu'il y a consensus autour de telles méthodes ; cela ne leur donne pourtant aucune légitimité. La sottise appuyée sur le bras de la malhonnêteté, aurait dit Chateaubriand.

## I. Introduction

Sur notre bonne vieille Terre, une bande d'un km de large, de part et d'autre de l'équateur, a une surface infime devant la surface totale de la Terre : le quotient est de l'ordre de  $0.16 \times 10^{-3}$ . Si une fusée, ou les débris d'un satellite, retombent sur Terre, il y a très peu de chances qu'ils le fassent précisément à moins d'un km de l'équateur. Si on choisit une latitude au hasard, il y a très peu de chances qu'elle soit voisine de 0.

Mais il n'en est pas de même si on travaille dans des espaces de grande dimension : pour la même bande, de même largeur, située de part et d'autre de l'équateur, le quotient tend vers 1 lorsque la dimension de l'espace augmente : toute la superficie se réfugie au voisinage de l'équateur ! Ce résultat, tout à fait contre-intuitif, est bien connu en mathématiques ; il s'appelle "concentration de la mesure" et la première référence est généralement attribuée à Vitali Milman [4] dans les années 1970. Voir le livre de Michel Ledoux "The concentration of measure phenomenon" [3] pour une liste de références.

On nous dira (nous sommes habitués !) : c'est une curiosité mathématique, ne venez pas nous déranger avec cela. Nous avons nos centrales nucléaires à construire, nos satellites à lancer, nos barrages à ériger. Vous êtes des poètes, des rêveurs.

Oui sans doute ! oui sans doute ! mais vous feriez peut-être mieux de vous informer sur ce qu'enseignent les mathématiques ; cela éviterait à vos centrales de tomber en panne, à vos satellites de s'écraser, à vos barrages de s'effondrer. Un consensus autour de doctrines incorrectes ne les rend pas correctes pour autant.

De nos jours, tout projet d'ingénierie utilise des codes de calcul et tout code de calcul incorpore de nombreux paramètres : on travaille donc en grande dimension. Comme il est exclu d'énumérer toutes les configurations possibles pour tous les paramètres, on procède généralement par explorations aléatoires. Et c'est là qu'intervient la géométrie des espaces de grande dimension : elle n'est pas intuitive et elle est difficile, mais elle transcrit les lois de la Nature.

Dans le présent article, en premier lieu, nous donnons un exemple très simple, très explicite, d'un code de calcul pour lequel une exploration aléatoire, si importante soit-elle, ne révélera jamais les zones à risque. Il est issu d'un article rédigé conjointement avec Giovanni Bruna, ancien directeur scientifique de l'IRSN, article intitulé "La prise en compte des incertitudes dans les codes de calcul ; utilisation incorrecte de la Méthode de Wilks" [1].

En second lieu, nous nous intéressons à un phénomène qui correspond à un besoin fréquent : la répartition des paramètres à somme constante. On dispose d'un budget total bien défini, et on veut le répartir entre plusieurs risques (pour une assurance), entre plusieurs usines (pour un industriel), entre plusieurs équipes (pour une activité commerciale). On va vouloir tirer au hasard les valeurs des différents paramètres, et ensuite les normaliser, par exemple en divisant par la somme.

Le point essentiel, qui n'est jamais pris en considération, est ceci : en tirant au hasard les paramètres, on croit ne privilégier aucune situation particulière dans l'espace des configurations : toutes ont la même probabilité. Mais, après normalisation, ce n'est plus le cas : on privilégie

(sans le savoir !!!) les situations où les paramètres sont voisins les uns des autres :  $X_1 \approx X_2 \approx \dots \approx X_N$ . Il en résulte que l'exploration est faussée : on ignore des zones à risque. Cette distorsion de la réalité est d'autant plus importante que le nombre de paramètres est plus élevé.

En dernier lieu, nous donnons une démonstration très simple du phénomène de concentration de la mesure. Elle est originale et certainement beaucoup plus grossière que celles qui sont données dans la littérature (où l'on trouve des versions quantitatives sophistiquées), mais elle suffit à montrer l'existence du phénomène et elle est tout à fait accessible aux ingénieurs (et peut-être même aux enseignants en mathématiques, sait-on jamais ?).

## II. Un exemple simple

Pour chaque paramètre, on connaît au mieux, à dire d'expert, une valeur minimale et une valeur maximale. L'exploration va se faire en choisissant au hasard une valeur pour chacun et, comme on ne sait rien, on choisira la loi uniforme pour chaque paramètre, sur l'intervalle min-max. Cette approche est parfaitement légitime en apparence, mais elle ne doit pas être faite en aveugle.

Pour illustrer le danger, commençons par un exemple très simple et parfaitement explicite. Supposons que la variable d'intérêt,  $Y$ , soit donnée par le produit explicite de paramètres :

$$Y = X_1 \times \dots \times X_{40},$$

où chaque paramètre est astreint à prendre des valeurs entre 0 et 1. Bien entendu, dans ces conditions, la variable  $Y$  sera elle-même entre 0 et 1. Supposons que la zone d'intérêt, ou de danger (comme on voudra) soit la situation  $Y \geq \frac{1}{2}$ . Alors on ne la trouvera jamais par une exploration aléatoire au moyen de la loi uniforme sur chaque paramètre : en effet, si on tire 40 nombres au hasard entre 0 et 1, c'est bien le diable si l'un d'eux n'est pas  $< \frac{1}{2}$  et en ce cas le produit aussi sera  $< \frac{1}{2}$ . En effet, l'inégalité :

$$X_1 X_2 \dots X_{40} > \frac{1}{2} \tag{1}$$

implique que nécessairement, dans ce cas, tous les  $X_i$  doivent être  $> \frac{1}{2}$ . Or :

$$P\left(X_i > \frac{1}{2}, \forall i\right) = \frac{1}{2^{40}} \approx 0.9 \times 10^{-12} \tag{2}$$

Il faudra donc au moins 1000 milliards de runs pour rencontrer une telle situation. La détection de la situation à risque est pratiquement impossible par une simulation numérique.

On peut calculer précisément la probabilité de l'événement (1) et on se rend compte que l'estimation en  $10^{-12}$  est bien optimiste ! En effet, le produit de  $n$  variables aléatoires indépendantes, suivant une loi uniforme sur  $[0,1]$ , a pour densité (voir Dettmann – Georgiou [2]) :

$$f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \left( \text{Log} \left( \frac{1}{x} \right) \right)^{n-1} .$$

On trouve  $P\left(Y \geq \frac{1}{2}\right) \approx 0.268 \times 10^{-54}$ .

Conclusion : si on veut explorer la situation où  $Y \geq \frac{1}{2}$ , il ne faut pas jeter les  $X_i$  au hasard selon une loi uniforme entre 0 et 1, mais forcer tous les  $X_i$  à être proches de 1. Il faut injecter des connaissances métier.

### III. Les dangers de la normalisation

Une autre situation, qui se rencontre fréquemment, est celle où, après avoir généré des données de manière aléatoire, on souhaite les normaliser. Expliquons bien ce qu'on entend par là : il s'agit d'une normalisation conjointe de toutes les variables et non de la mise à l'échelle de chacune d'elles. La mise à l'échelle d'une variable, consistant à remplacer  $X$  par  $\frac{X - X_{\min}}{X_{\max} - X_{\min}}$  est parfaitement légitime et permet d'astreindre chaque variable à se trouver dans l'intervalle 0-1. C'est indispensable, en particulier si l'on utilise des unités différentes.

On a généré, de manière aléatoire, un jeu de données  $(X_1, \dots, X_N)$  et on souhaite les normaliser, c'est-à-dire les remplacer par :

$$\left( \frac{X_1}{\sum_{n=1}^N X_n}, \dots, \frac{X_N}{\sum_{n=1}^N X_n} \right) \text{ ou, selon les cas, } \left( \frac{X_1}{\sqrt{\sum_{n=1}^N X_n^2}}, \dots, \frac{X_N}{\sqrt{\sum_{n=1}^N X_n^2}} \right) .$$

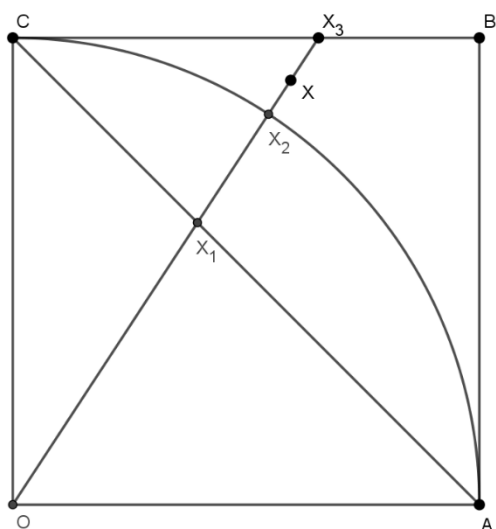
La première normalisation (dite "en norme  $l^1$ ") se rencontre dans les situations financières, à budget constant. La seconde normalisation (dite "en norme  $l^2$ ") se rencontre lorsqu'il s'agit de fixer un écart entre plusieurs situations ; elle se rencontre en particulier dans les démonstrations de sûreté.

Si on génère les données selon une loi uniforme, on donne la même importance à toutes les situations. Le problème est que, après normalisation, cette égalité d'importance disparaît ; on privilégie les situations d'égalité  $X_1 \approx X_2 \approx \dots \approx X_N$  ; très peu de gens sont conscients de ce biais méthodologique.

Un exemple très ancien où des données sont générées aléatoirement pour évaluer un risque est la situation, pour les compagnies d'assurance, des Générateurs de Scénarios Economiques. Par exemple, on générera aléatoirement telle variation de l'inflation, telle variation du prix du pétrole, etc., et on étudiera l'impact sur la situation future de l'entreprise. Les lois utilisées pour générer les risques correspondant à chaque paramètre sont en général très complexes : ce ne sont pas des lois uniformes, mais notre mise en garde s'applique de la même façon.

Un ensemble de risques étant défini, l'entreprise mettra en regard une certaine somme d'argent, destinée à couvrir ces risques : la somme des montants alloués aux risques  $R_1, R_2, \dots$ , etc., est égale au montant total dont l'entreprise peut disposer (essentiellement les fonds propres).

Voyons ceci sur un exemple. Supposons que l'entreprise soit exposée à deux risques,  $R_1, R_2$  ; le premier est dans la gamme 0-100 et le second dans la gamme 0-1000. Des tirages aléatoires ont donné les valeurs  $R_1 = 32, R_2 = 453$ . L'entreprise dispose d'une somme de 300 €. Comment la répartir entre les deux ? Elle le fera au prorata de l'importance de chacun : sur  $R_1$ , elle allouera  $\frac{32}{32+453} \times 300$  et sur  $R_2$ , elle allouera  $\frac{453}{32+453} \times 300$ . C'est très simple. En apparence, tous les risques avaient même probabilité : loi uniforme sur 0-100 pour le premier, loi uniforme sur 0-1000 pour le second : pas de privilège. Le problème est que, en normalisant comme on l'a fait, un privilège a été introduit.



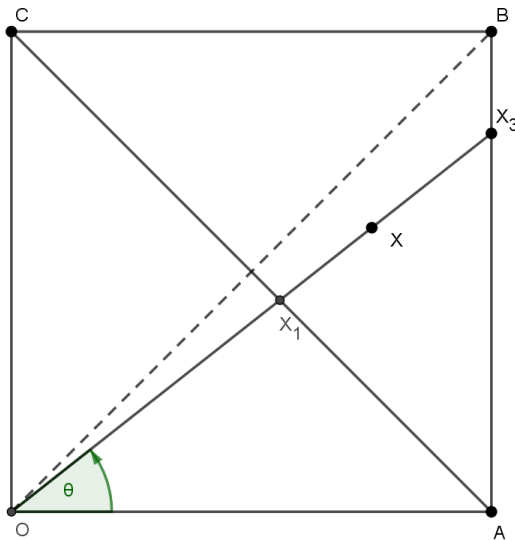
Pour bien comprendre ceci, il est nécessaire de passer du temps sur la figure ci-contre.

Dans cette figure, la longueur de  $OA$  vaut 1, de même  $OC = 1$ , si bien que le point  $X$  a été tiré selon une loi uniforme sur ses deux coordonnées : il peut donc être n'importe où, avec égale probabilité, à l'intérieur du carré  $OABC$ .

Maintenant, normalisons  $X$  en remplaçant  $(x_1, x_2)$  par  $\left( \frac{x_1}{x_1 + x_2}, \frac{x_2}{x_1 + x_2} \right)$  ; le point  $X$  se trouve maintenant en  $X_1$  sur la figure : il est sur le segment  $AC$ , parce que l'équation de celui-ci est  $x + y = 1$ .

Le point  $X$ , après normalisation, se retrouvera en  $X_1$ , quelle que soit sa position sur le segment  $OX_3$ . La probabilité de se retrouver en  $X_1$  dépend donc de la longueur du segment  $OX_3$  et celle-ci n'est pas la même selon les différentes inclinaisons possibles. Elle est minimale si  $X_3$  est en  $A$  ou  $C$ , maximale si  $X_3$  est en  $B$ . La densité de probabilité du point  $X_1$  dépend donc de l'angle  $\vartheta = (OA, OX)$ .

Pour  $\vartheta \leq \frac{\pi}{4}$ , on a  $x_2 \leq x_1$  et la longueur de  $OX_3$  vaut  $\sqrt{1+x_2^2}$ ; pour  $\vartheta \geq \frac{\pi}{4}$ , on a  $x_2 \geq x_1$  et la longueur de  $OX_3$  vaut  $\sqrt{1+x_1^2}$ .



Le point  $X_1$  est sur le segment AC puisque le point  $X$  est à l'intérieur du carré  $OABC$ . Distinguons deux cas, selon la valeur de  $\vartheta$ .

Si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ , la probabilité du segment  $AX_1$  est la probabilité du triangle  $OAX_3$ , donc l'aire de ce triangle, puisque nous sommes en présence d'une loi uniforme. On a donc :

$$area(OAX_3) = \frac{\tan(\theta)}{2}.$$

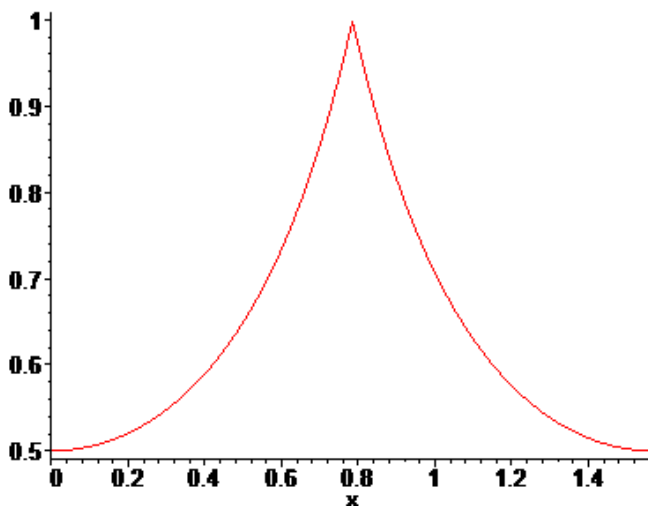
De même, si  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $area(OAX_3) = 1 - \frac{\tan(\frac{\pi}{2} - \theta)}{2} = 1 - \frac{1}{2 \tan(\theta)}$ .

Soit  $f(\theta)$  la densité de probabilité relative à la position de  $X_1$  et  $F(\theta)$  la fonction de répartition associée. On obtient :

Si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $F(\theta) = \frac{\tan(\theta)}{2}$ ; si  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $F(\theta) = 1 - \frac{1}{2 \tan(\theta)}$ .

Puisque  $f(\theta) = F'(\theta)$ , nous en déduisons :

Si  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $f(\theta) = \frac{1}{2 \cos^2(\theta)}$ ; si  $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $f(\theta) = \frac{1}{2 \sin^2(\theta)}$ .



Voici le graphe de cette fonction ; ce n'est pas du tout une loi uniforme et la valeur centrale ( $\pi/4$ ) est privilégiée.

Après correction, c'est-à-dire après normalisation, nous privilégions les situations où  $x_1 \approx x_2$  et défavorisons les situations où  $x_1$  ou  $x_2$  sont petits : il peut en résulter une erreur dans la prise de décision.

Il en va de même si nous utilisons la normalisation en norme  $l^2$  :

$$y_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}, y_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}.$$

Dans cet exemple, nous étions en dimension 2. L'erreur est plus grande en dimension 3 : le raisonnement est le même pour les deux normalisations. La densité de probabilité du point, après normalisation, est proportionnelle à la longueur du segment, partant de l'origine, et se terminant sur le cube unité. Si on va vers le point  $(1,0,0)$ , la longueur est 1 ; si on va vers  $(1,1,1)$  la longueur est  $\sqrt{3}$ .

De même en dimension  $n$  : si on va vers le point le plus éloigné du cube unité, à savoir  $(1,1,\dots,1)$ , la longueur du segment est  $\sqrt{n}$ . Plus la dimension est importante, c'est-à-dire plus le nombre de paramètres est élevé, et plus l'erreur résultant de la normalisation est importante : on privilégie les situations où tous les paramètres sont proches.

Il est possible de remédier à ceci en construisant directement une loi uniforme sur la sphère unité (Muirhead [5]) :

**Théorème.** - Soient  $N \geq 1$  et  $X_1, \dots, X_N$  des variables normales indépendantes (espérance 0, variance 1). Alors les variables :

$$\frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_N^2}}, \dots, \frac{X_N}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_N^2}}$$

sont indépendantes et suivent une loi uniforme sur la sphère unité de l'espace euclidien de dimension  $N$ .

En d'autres termes, si on veut une loi uniforme sur la sphère, il ne faut pas partir avec des lois uniformes, mais avec des gaussiennes.

## IV. Les paradoxes de la grande dimension

### A. Formules générales

Soit  $S_{n-1}(r)$  la sphère de dimension  $n-1$  et de rayon  $r$  dans un espace de dimension  $n$ . Elle se définit par :

$$S_{n-1}(r) = \{(x_1, \dots, x_n), x_1^2 + \dots + x_n^2 = r^2\}.$$

La définition dépend de  $n$  paramètres, mais il y a une relation entre eux, d'où la notation  $S_{n-1}$ .

La boule  $B_n(r)$ , boule de rayon  $r$  en dimension  $n$ , est définie par :

$$B_n(r) = \{(x_1, \dots, x_n), x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq r^2\}.$$

La sphère est la surface (on dit plutôt la "frontière") de la boule : en dimension 2, nous avons le disque (c'est la boule) et le cercle (la sphère).

La surface de la sphère et le volume de la boule se calculent assez facilement par récurrence sur la dimension, voir Wikipedia [6]. On trouve :

$$\text{vol}(B_n(r)) = \frac{\pi^{n/2} r^n}{(n/2)!} \text{ si } n \text{ est pair ; } \text{vol}(B_n(r)) = \frac{2^{(n+1)/2} \pi^{(n-1)/2} r^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

Chose étonnante, pour  $r = 1$ , le volume de la boule unité croît d'abord avec  $n$ , passe par un maximum pour  $n = 5$  (il vaut alors  $\frac{8\pi^2}{15}$ ) et décroît ensuite ; il tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Pour tout  $r$ , le volume est proportionnel à  $r^n$  et tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

Pour la sphère  $S_n(r)$  (donc dans un espace de dimension  $n+1$ ) l'aire est donnée par les formules :

$$\text{aire}(S_n(r)) = \frac{\pi^{(n+1)/2} r^n}{\frac{1}{2} \left(\frac{n-1}{2}\right)!} \text{ si } n \text{ est impair ; } \text{aire}(S_n(r)) = \frac{2^{n/2+1} \pi^{n/2} r^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1)} \text{ si } n \text{ est pair.}$$

Le même phénomène se produit : pour  $r = 1$ , l'aire est maximale pour  $n = 6$  (elle vaut  $\frac{16}{15} \pi^3$ ) et décroît ensuite ; elle tend vers 0 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

### B. Aire d'une bande autour de l'équateur

Un phénomène très étrange se produit lorsque la dimension s'élève ; il est connu sous le nom de "concentration de la mesure". Sur notre Terre usuelle, si l'on prend une bande d'un km de large, de part et d'autre de l'équateur, sa superficie, en  $km^2$ , est négligeable devant celle de la Terre entière.

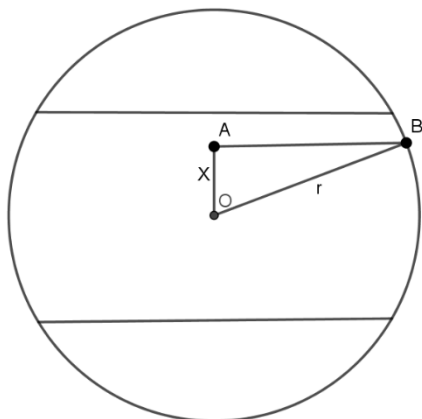
$$\text{Le rapport vaut : } \frac{2 \times \text{perimetre\_Terre}}{\text{surface\_Terre}} \approx \frac{80 \times 10^3}{510 \times 10^6} \approx 0.16 \times 10^{-3}.$$

Il n'en est plus du tout ainsi lorsque la dimension augmente. Plus précisément, pour la même bande (largeur 1 km, de part et d'autre de l'équateur), le rapport à la surface totale tend vers 1 lorsque  $n \rightarrow +\infty$ . Nous allons démontrer ce fait.

**Théorème.** – Soit  $A_\alpha$  une bande constituée, sur la sphère  $S_n$ , de l'ensemble des points situés à distance au plus  $\alpha$  de l'équateur de la sphère. Alors, pour tout  $\alpha$  fixé, le quotient  $\frac{\text{aire}(A_\alpha)}{\text{aire}(S_n)} \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ .

**Démonstration du Théorème.**

Il existe des versions quantitatives précises de cet énoncé, dont les démonstrations sont difficiles. Nous donnons ici une version simplifiée.



Rappelons tout d'abord que l'équateur est simplement l'intersection de la sphère avec un plan (ici un hyperplan) passant par le centre.

Sur la sphère  $S_n$ , l'aire de la bande  $A_\alpha$  située entre les cotes  $x_n = -\alpha$  et  $x_n = \alpha$  est l'intégrale des aires des sphères  $S_{n-1}$  de rayon associé. En notant simplement  $x$  au lieu de  $x_n$ , on a la formule (voir dessin ci-contre) :

$$\text{aire}(A_\alpha) = \int_{x=-\alpha}^{x=\alpha} \text{aire}(S_{n-1}(\sqrt{r^2 - x^2})) dx,$$

puisque, à la cote  $x$ , le rayon est  $\sqrt{r^2 - x^2}$ . Nous voulons montrer que, pour  $r = 1$  (en fait, pour tout  $r$ ), le quotient :

$$Q = \frac{\text{aire}(A_\alpha)}{\text{aire}(S_n)} = \frac{\int_{x=-\alpha}^{x=\alpha} \text{aire}(S_{n-1}(\sqrt{1-x^2})) dx}{\int_{x=-1}^{x=1} \text{aire}(S_{n-1}(\sqrt{1-x^2})) dx} \rightarrow 1 \text{ lorsque } n \rightarrow +\infty.$$

Or nous avons vu plus haut les formules :

$\text{aire}(S_{n-1}(r)) = C_n r^{n-1}$ , où  $C_n$  est une constante indépendante du rayon. On a donc :

$$Q = \frac{\int_{x=-\alpha}^{x=\alpha} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx}{\int_{x=-1}^{x=1} (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx}.$$

Montrer que  $Q \rightarrow 1$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  est équivalent à montrer que  $Q_1 \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , où :

$$Q_1 = \frac{\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx}{\int_0^1 (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx}$$

**Lemme.** – Si  $x > \alpha$ ,  $1-x^2 < (1-\alpha^2) \left(1 - \left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^2\right)$ .

Expliquons le sens intuitif du lemme. Il est évident que  $(1-x^2)^n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , puisque  $|x| < 1$ . Mais la fraction qui se trouve au-delà de  $x > \alpha$  est encore plus petite, négligeable devant la quantité totale. La quantité  $1 - \left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^2$  est la même que  $1-x^2$  à un changement de variable près, ramenant l'intervalle  $[\alpha, 1]$  sur  $[0, 1]$ .

**Démonstration du Lemme.** – On écrit :

$$\frac{(1+x)(1-x)}{\left(1 - \frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)\left(1 + \frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)} = \frac{(1-\alpha)^2(1+x)}{1+x-2\alpha}.$$

La fonction du second membre est décroissante pour  $x > \alpha$  et prend donc son maximum pour  $x = \alpha$  ; ce maximum vaut  $1-\alpha^2$ , d'où le lemme.

Démontrons maintenant le théorème. On a :

$$\int_{\alpha}^1 (\sqrt{1-x^2})^{n-1} dx \leq (1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} \int_{\alpha}^1 \left(1 - \left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx.$$

Le changement de variable  $y = \frac{x-\alpha}{1-\alpha}$ ,  $x = y(1-\alpha) + \alpha$ ,  $dx = (1-\alpha)dy$  donne :

$$\int_{\alpha}^1 \left(1 - \left(\frac{x-\alpha}{1-\alpha}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx = (1-\alpha) \int_0^1 (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy$$

et donc :

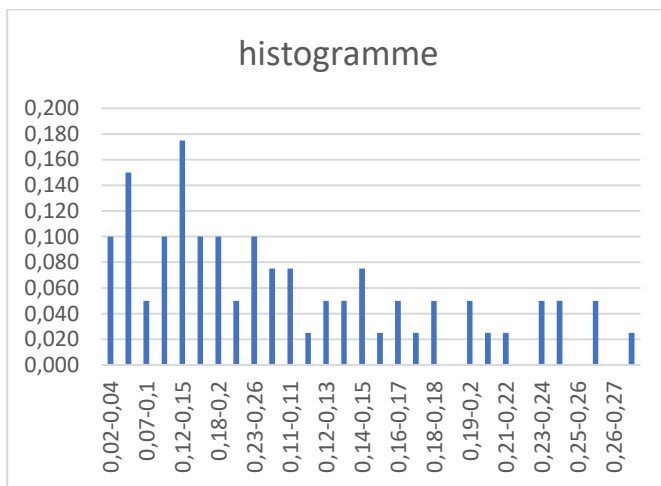
$Q_1 \leq (1-\alpha)(1-\alpha^2)^{\frac{n-1}{2}} \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , puisque  $\alpha < 1$ . Ceci prouve le théorème.

### C. Interprétation

Nous avons dit plus haut que cette notion de concentration était peu intuitive : c'est vrai si on se réfère à la géométrie euclidienne usuelle. Mais elle devient intuitive si on raisonne en langage purement probabiliste, sans référence à la géométrie.

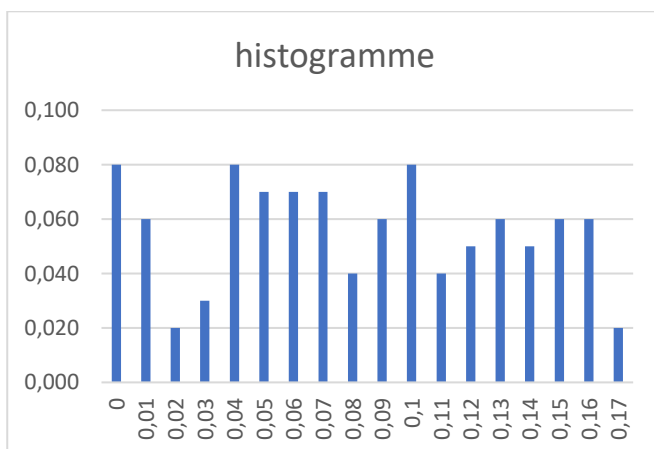
Tout d'abord, nous avons dit que la concentration se faisait dans une bande, au voisinage de l'équateur. Sur Terre, l'équateur est défini par référence à un plan, passant par le centre de la Terre, et perpendiculaire à l'axe de rotation. Mais, sur une sphère quelconque, il n'y a pas d'axe de rotation et aucune coordonnée n'est privilégiée. Le résultat signifie donc qu'avec forte probabilité, après normalisation, toutes doivent être petites. Voyons des exemples.

Nous tirons 40 nombres avec probabilité uniforme entre 0 et 1. La valeur maximum est 0,27. Voici l'histogramme des valeurs normalisées :

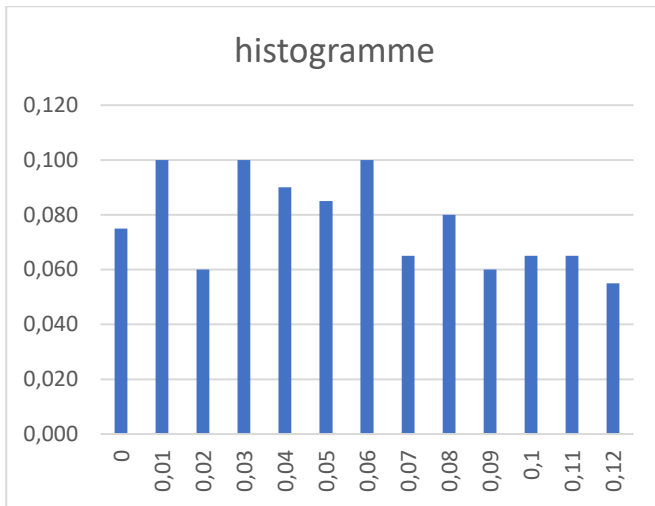


Il y a plus de valeurs dans les classes de gauche que dans celles de droite ; la répartition n'est pas uniforme sur 0-1.

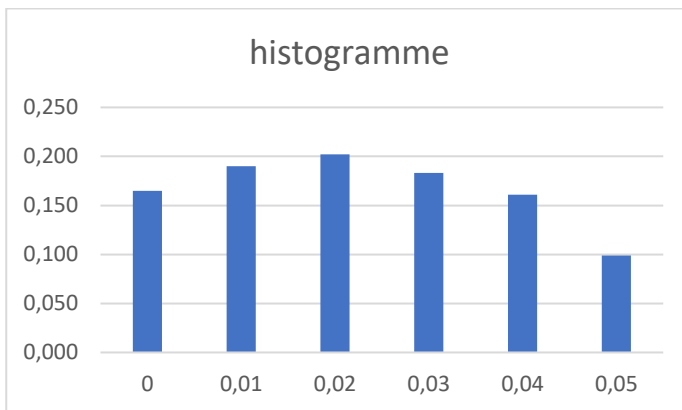
Dans le cas de 100, le maximum est à 0.17 ; voici la répartition en classes :



Dans le cas de 200, le maximum est 0.13 :



Dans le cas de 1000, le maximum est à 0,06 :



#### D. Eléments de théorie

Nous allons montrer la proposition suivante, qui explique bien pourquoi les variables normalisées

deviennent petites lorsque  $N$  augmente.

$$\frac{X_n}{\left(\sum_{k=1}^N X_k^2\right)^{1/2}}$$

**Proposition.** - Soient  $X_n$   $n=1, \dots, N$  des variables indépendantes suivant une loi uniforme sur  $[0,1]$ . Alors, pour tout  $n$  et tout  $N$  :

$$P \left\{ \frac{X_n}{\left(\sum_{k=1}^N X_k^2\right)^{1/2}} \leq \sqrt{\frac{12}{N}} \right\} \geq 1 - \frac{64}{45N}.$$

**Démonstration de la proposition.** - Commençons par déterminer la loi de  $X^2$  si  $X$  suit une loi uniforme sur  $0-1$ . On a :

$$P\{X^2 \leq a\} = P\{X \leq \sqrt{a}\} = \sqrt{a},$$

d'où la densité :

$$f_{X^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad 0 \leq x \leq 1, 0 \text{ sinon.}$$

$$\text{L'espérance vaut } E(X^2) = \int_0^1 x f_{X^2}(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^{1/2} dx = \frac{1}{3},$$

$$\text{et la variance : } V(X^2) = E(X^4) - (E(X^2))^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}.$$

$$\text{Etudions maintenant } S = \sum_1^N X_n^2. \text{ On a : } E(S) = \frac{N}{3} ; V(S) = \frac{4N}{45}.$$

Utilisons l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff :  $P(|S - E(S)| > \alpha) \leq \frac{V(S)}{\alpha^2}$  avec  $\alpha = \frac{N}{4}$  :

$$P\left(\left|S - \frac{N}{3}\right| > \frac{N}{4}\right) \leq \frac{16}{N^2} \frac{4N}{45} = \frac{64}{45N},$$

autrement dit :  $\frac{N}{3} - \frac{N}{4} \leq S \leq \frac{N}{3} + \frac{N}{4}$  avec probabilité  $\geq 1 - \frac{64}{45N}$ . En particulier,  $S \geq \frac{N}{12}$  avec probabilité  $\geq 1 - \frac{64}{45N}$  et  $\sqrt{S} \geq \sqrt{\frac{N}{12}}$ .

Chaque variable étant du type  $\frac{X_n}{\sqrt{S}}$ , elle sera inférieure à  $\sqrt{\frac{12}{N}}$  avec probabilité  $\geq 1 - \frac{64}{45N}$ . Ceci prouve la proposition.

## Références

- [1] Bernard Beauzamy et Giovanni Bruna : La prise en compte des incertitudes dans les codes de calcul : utilisation incorrecte de la Méthode de Wilks, mai 2024  
[https://www.scmsa.eu/archives/Methodes\\_probabilistes\\_demonstrations\\_surete\\_BB\\_GB\\_2024\\_05\\_20.pdf](https://www.scmsa.eu/archives/Methodes_probabilistes_demonstrations_surete_BB_GB_2024_05_20.pdf)
- [2] Carl P. Dettmann and Orestis Georgiou : Product of  $n$  independent Uniform Random Variables, *Statistics and Probability Letters*, 79 (2009) 2501–2503.
- [3] Michel Ledoux (2001). *The Concentration of Measure Phenomenon*. American Mathematical Society. ISBN 0-8218-2864-9.
- [4] Vitali Milman voir M. Gromov, *Spaces and questions, GAFA 2000 (Tel Aviv, 1999)*, *Geom. Funct. Anal.* 2000, Special Volume, Part I, 118–161.
- [5] Muirhead, R. J. (1982). *Aspects of Multivariate Statistical Theory*. Wiley, New York, ISBN 0-471-09442-0, page 37.
- [6] Wikipedia [https://en.wikipedia.org/wiki/Concentration\\_of\\_measure](https://en.wikipedia.org/wiki/Concentration_of_measure)
- Livre d'introduction à ces questions :
- [IEPE] Bernard Beauzamy : *Introduction à l'étude des Probabilités Expérimentales*. Editions de la SECM, ISBN 979-10-95773-02-3, ISSN 1767-1175. Relié, 192 pages. Janvier 2023.  
[https://www.scmsa.eu/livres/SCM\\_IEPE\\_order.htm](https://www.scmsa.eu/livres/SCM_IEPE_order.htm)