



Discrétisation d'un mouvement :

une approche incorrecte

Bernard Beauzamy

26/04/2025

Résumé opérationnel

Le traitement informatique du mouvement d'un mobile requiert une discrétisation : on détermine la position du mobile en des instants successifs : toutes les heures, les secondes, les millisecondes, selon la précision voulue. En général, la position à l'instant suivant est calculée à partir de la vitesse à l'instant précédent.

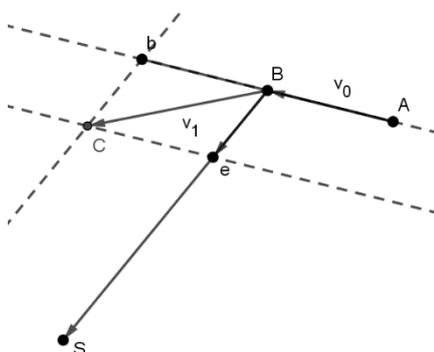
Nous montrons ici que cette approche n'est pas correcte. L'erreur due à ce type de discrétisation peut devenir supérieure à l'erreur de mesure proprement dite.

Des erreurs de ce type sont souvent commises dans le traitement informatique des lois de la Nature : on cherche à les simplifier en les linéarisant.

1. Le mouvement d'un satellite

Lorsqu'on veut déterminer le mouvement d'une planète autour du Soleil, ou d'un satellite autour de la Terre, on procède souvent par décomposition ; c'est ce que fait Richard Feynman dans son livre "Mouvement des planètes autour du Soleil". L'argument vaut en fait pour n'importe quel mouvement, par exemple celui d'un véhicule qui accélère ou qui freine, comme nous le verrons plus loin.

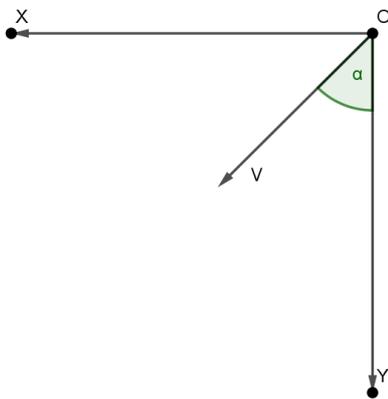
A un instant donné, on regarde le mouvement dans le prolongement de la vitesse précédente, et le mouvement dans le sens de la force, et on fait la somme vectorielle des deux :



A un instant, le mobile est en A ; à la seconde suivante, il se retrouve en B . Pour déterminer le mouvement à partir de B , on raisonne comme suit : s'il continuait sur sa lancée, sans force d'attraction, il se retrouverait en b , tel que $\overline{AB} = \overline{Bb}$.

Détermination de la trajectoire réelle

Il est facile de déterminer la trajectoire réelle du mobile.



On se place dans un repère où l'axe Oy , dirigé vers le bas, est porté par la force ; l'axe Ox est perpendiculaire, dirigé vers la gauche et le vecteur vitesse \vec{V}_0 fait un angle α avec la force. La composante verticale du mouvement a donc pour équation :

$$y = \frac{1}{2} \gamma t^2 + V_0 \cos(\alpha) t$$

et la composante horizontale :

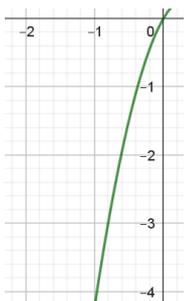
$$x = V_0 \sin(\alpha) t$$

On en déduit :

$$t = \frac{x}{V_0 \sin(\alpha)}$$

et donc l'équation cartésienne :

$$y = \frac{\gamma x^2}{2V_0^2 \sin^2(\alpha)} + \frac{x}{\tan(\alpha)}$$



qui est celle d'une parabole. Ci-contre le graphique pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, $V_0 = 4$ m/s, $\gamma = 5$ m/s².

2. Analyse de l'erreur en général

De manière générale, l'erreur se produit dès que l'on cherche à discrétiser un mouvement qui n'est pas uniforme. Prenons l'exemple simple d'un mobile en accélération constante sur un

axe : $x = \frac{1}{2} \gamma t^2$; au bout d'une seconde, sa position sera $x = \frac{1}{2} \gamma$ (en mètres) et sa vitesse $v = \gamma$ (en mètres par seconde). Si on procède par discrétisation, à partir de la position en $t = 1$, on

estimera que la position en $t = 2$ est $x = \frac{1}{2} \gamma + \gamma = \frac{3}{2} \gamma$ alors qu'elle est en réalité $x = 2\gamma$.