Société de Calcul Mathématique SA
*Outils d'aide à la décision*
*depuis 1995*

# Mouvement des planètes autour du Soleil

# Une erreur de Richard Feynman

par Bernard Beauzamy

Septembre 2024

## Introduction

Richard Feynman (1918-1988) est bien connu comme physicien théoricien, comme enseignant et comme vulgarisateur (son livre "Vous voulez rire, M. Feynman" est une merveille d'esprit critique). Malheureusement, de temps en temps il va trop vite et des erreurs se glissent dans ses travaux ; nous en avons déjà relevé une en 2015, en ce qui concerne l'électrodynamique quantique ; voir :
https://scmsa.eu/archives/BB_2015_Quantum_electrodynamics_doubts.pdf

Ici, il s'agit du mouvement des planètes, tel que le présente le petit livre "Le mouvement des planètes autour du Soleil", rédigé par ses disciples David Goodstein et Judith Goodstein, à partir des notes de cours de Feynman (Editions Cassini, collection "le sel et le fer", 2009). La démonstration qui est donnée du fait qu'une force centrale Newtonienne (en $1/r^2$) engendre nécessairement une trajectoire qui est une ellipse est fausse, tout comme le résultat lui-même.

Chacun de nous commet des erreurs lors d'une présentation orale ; mais là il s'agit d'un livre et l'erreur aurait dû être corrigée par les auteurs, disciples de Feynman. Il semble en outre que personne ne l'ait relevée.

Dans un premier temps, Feynman utilise les méthodes d'Archimède (triangles semblables) pour établir la seconde loi de Kepler, mais il veut ensuite faire le lien avec la force en $1/r^2$, toujours en utilisant des triangles semblables, et là il échoue lamentablement : n'est pas Archimède qui veut !

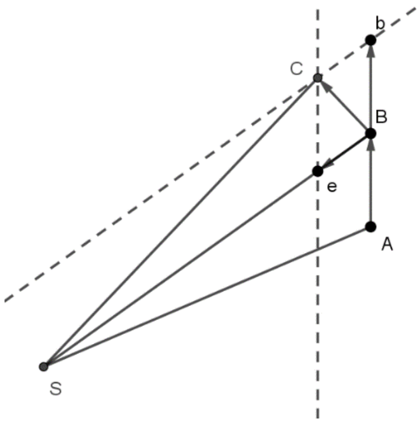
# I. Ce qui est juste

La proposition suivante est reproduite de Feynman, qui la tenait de Newton, qui la tenait de Kepler, qui la tenait d'Archimède :

**Proposition.** – *Si un mouvement plan résulte d'une force centrale, le rayon vecteur décrit des aires égales en des temps égaux.*

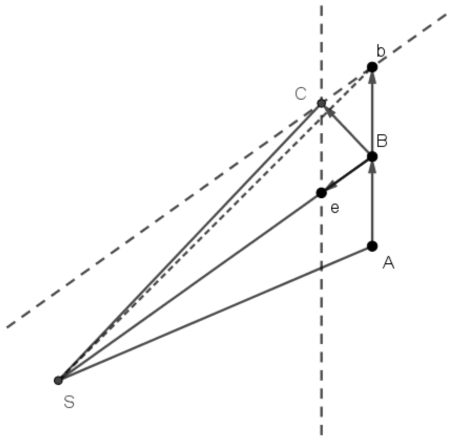
Ceci est généralement connu sous le nom de "seconde loi de Kepler". Le point essentiel est qu'aucune hypothèse sur la nature de la force n'est imposée ; elle n'a pas à être en $1/r^2$. La démonstration se fait selon les méthodes d'Archimède.

**Démonstration.** – Soit une planète, qui gravite autour du Soleil (en $S$). On discrétise le mouvement de la planète, initialement en $A$.




Au bout d'un intervalle de temps, la planète se retrouve en $B$. Elle est attirée par le Soleil, situé au point $S$.

Au point $B$, si elle continuait par inertie, sans attraction, elle se retrouverait en $b$ avec égalité des vecteurs $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Bb}$. Si elle était immobile en $B$, elle se dirigerait vers $S$ et se retrouverait en $e$, sur le segment $BS$. En définitive, elle se retrouve en $C$, tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{Bb} + \overrightarrow{Be}$ (somme vectorielle : voir figure).




Il est évident que les triangles $SAB$ et $SBb$ ont la même aire : ils ont un côté commun ($SB$) et des hauteurs égales, puisque $AB = Bb$.

Reste à montrer que $SBb$ et $SBC$ ont la même aire. Comme $bC$ est parallèle à $BS$, les hauteurs menées de $b$ et $C$ sur $BS$ ont même longueur, ce qui prouve la Proposition.

Version moderne, en coordonnées polaires :

**Proposition.** - *En coordonnées polaires, l'énoncé "aires égales en des temps égaux" se traduit par :*

$$r^2 \dot{\vartheta} = cste$$

où $r, \vartheta$ sont les coordonnées polaires et $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$.

**Démonstration**

(voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées_polaires, calcul intégral)

Soit $A$ une surface du plan délimitée par la courbe continue $r(\theta)$ et les demi-droites $\vartheta = a$ et $\vartheta = b$, où $0 < b - a < 2\pi$ ($a$ et $b$ étant des réels). Alors l'aire $S$ de cette surface est :

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\vartheta)\,d\vartheta$$

Si on prend $\vartheta(0) = 0$, l'aire entre le temps $t = 0$ et le temps $t$ doit être proportionnelle à $t$ :

$$\int_a^{\vartheta(t)} r^2(u)\,du = \lambda t$$

et en dérivant par rapport à $t$ :

$$r^2(\vartheta(t))\dot{\vartheta}(t) = \lambda$$

Ceci prouve la Proposition.

## II. Détermination de la trajectoire de la planète

A priori, on connaît seulement la relation résultant de la gravitation universelle :

$$F = \frac{kMm}{r^2} \quad (1)$$

où $M$ est la masse du Soleil, $m$ celle de la planète et $r$ la distance qui les sépare. La première loi de Kepler dit que la planète décrit une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers. Ce n'est pas tout à fait exact : c'est le barycentre (Soleil, Terre) qui se trouve au foyer. Mais comme le Soleil est beaucoup plus gros, on peut admettre l'approximation.

On déduit de (1) :

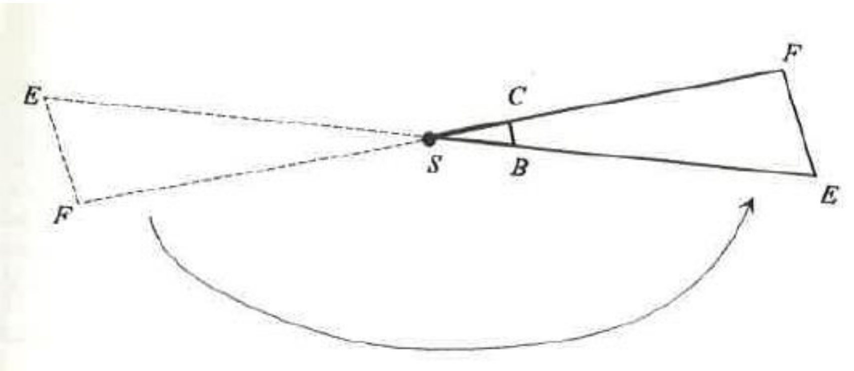
$$\gamma = \frac{kM}{r^2} \quad (2)$$

où $\gamma$ est l'accélération de la planète, dirigée vers le centre du Soleil, considéré comme fixe.

Il n'est pas facile de déduire la forme de l'orbite à partir de (2), d'autant que cette forme dépend des conditions initiales, qui n'apparaissent pas dans (2).

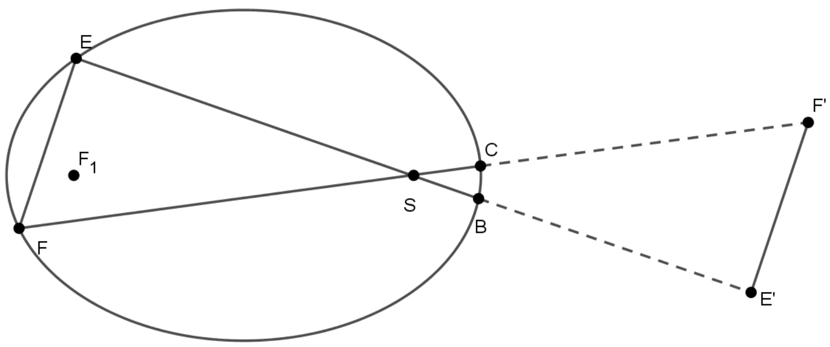
L'énoncé donné dans [Feynman], page 126 : "nous avons prouvé que les lois de Newton, avec une force de gravité en $r^{-2}$ dirigée vers le Soleil, engendrent des orbites planétaires elliptiques" est évidemment faux : en fonction des conditions initiales, la trajectoire peut être une hyperbole.

Pour sa démonstration, Feynman décide de découper l'orbite en secteurs de même angle au centre, et non plus de même temps. Il dit, page 105 : "nous savons que la planète va plus vite de B à C que de E à F. Pour savoir exactement combien de fois plus vite, nous devons comparer les surfaces des triangles SBC et SEF, puisque les intervalles de temps sont proportionnels aux surfaces balayées. Rappelez-vous que les deux triangles ont le même angle en S. En pivotant SEF de façon à ce qu'il recouvre SBC, on obtient :




(figure reproduite de [Feynman], page 105)

Il affirme ensuite que les deux triangles SEF et SBC sont semblables. C'est évidemment faux. La figure ci-dessous reproduit la précédente :




Le triangle SE'F' est le symétrique de SEF par rapport à S. Il est complètement évident que SBC et SE'F' ne sont pas semblables : BC n'est pas parallèle à E'F'.

## III. Comment procéder ?

Il n'est pas facile de déduire la forme de la trajectoire directement de la loi de l'attraction, d'autant que, comme nous l'avons dit, la trajectoire dépend des conditions initiales. Il nous paraît impossible de le faire par des considérations de géométrie élémentaire, comme Feynman prétend le faire. On peut assurément résoudre l'équation (2) et les constantes qui interviendront dans la résolution détermineront la forme de la trajectoire.

La meilleure méthode nous paraît être de recourir à une expression sous forme d'énergie. Du fait de la pesanteur, la planète a une énergie potentielle :

$E_p = -\frac{GmM}{r}$ où $G$ est la constante universelle de gravitation

et du fait du mouvement, une énergie cinétique :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

et la somme des deux, appelée énergie mécanique, doit rester constante. Sous cette forme, on a l'impression que la masse de la planète apparaît ; or on sait qu'elle n'intervient pas dans la forme de la trajectoire. Il faut donc écrire l'équation en faisant référence aux conditions initiales :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{r_0}$$

qui se simplifie en :

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{GM}{r_0}$$

On résout ceci en passant en coordonnées polaires ; la démonstration est faite dans de nombreux ouvrages, voir par exemple :

https://femto-physique.fr/mecanique/forces-centrales.php

Le type de trajectoire se déduit du signe de l'énergie mécanique ; elle est elliptique si et seulement si $E_m < 0,$ c'est-à-dire, pour les conditions initiales :

$$\frac{1}{2}v_0^2 < \frac{GM}{r_0}$$

ou encore :

$$r_0v_0^2 < 2GM.$$