



## L'ellipse et ses mystères

v. 4, avril 2025

par Bernard Beauzamy

Chacun de nous sait ce qu'est une ellipse : elle se rencontre au quotidien, sous la forme de la nappe que l'on met sur une table et du massif que trace le jardinier ; la Nature l'utilise de manière fondamentale, puisque les orbites des planètes sont elliptiques. L'apparence est harmonieuse et les propriétés semblent connues depuis l'antiquité.

Il n'en est rien : dès l'abord, c'est-à-dire dès la présentation géométrique, on se trouve devant des dizaines de définitions différentes, dont le lien n'est nullement évident. Et s'il y a tant de définitions, c'est qu'aucune n'est la bonne !

Déjà, à ce stade, nos mathématiques sont inefficaces : on ne sait pas calculer la longueur d'une ellipse au moyen d'une formule explicite, comme c'est le cas pour le cercle. Pourtant, la Nature résout cette question de manière simple : imaginons une ellipse faite d'un fil inextensible (comme une chaîne de moto) ; il suffit de la gonfler pour qu'elle devienne un cercle, à périmètre inchangé.

Les choses sont bien pires lorsqu'on s'intéresse aux propriétés dynamiques : le mouvement des planètes autour du Soleil. La seconde loi de Kepler nous dit que le rayon vecteur, qui relie le Soleil à la planète, parcourt des aires égales en des temps égaux. Fort bien, mais il n'existe aucune formule explicite permettant de calculer l'aire d'un secteur elliptique : on ne peut procéder que par routine numérique et approximation.

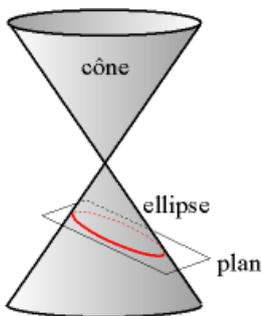
L'ellipse est une excellente illustration de cette évidence : nos mathématiques sont impuissantes à décrire correctement les lois de la Nature, même les plus simples.

# Première Partie

## Définitions et propriétés géométriques

Dans cette première partie, nous donnons les définitions anciennes de l'ellipse, déjà connues des Grecs, et les définitions plus modernes, en termes de coordonnées.

### 1. La définition antique

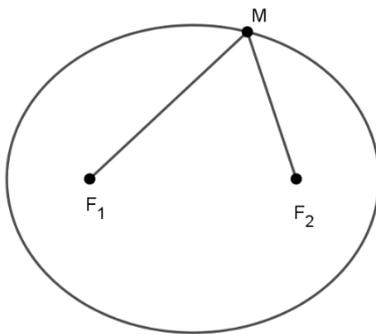


Pour les Anciens, en particulier les Grecs, l'ellipse est obtenue par intersection d'un cône et d'un plan : voir image ci-contre, issue de Wikipedia "ellipse" : [https://fr.wikipedia.org/wiki/Ellipse\\_\(mathématiques\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Ellipse_(mathématiques))

Selon l'angle du plan avec l'axe du cône, on obtient un cercle, une ellipse ou une hyperbole (le cas limite étant celui où le plan est parallèle à une génératrice du cône).

Au 21<sup>ème</sup> siècle, nous avons complètement perdu cette faculté de visualisation ; l'apparition des coordonnées, puis de l'informatique, a rendu nécessaires d'autres définitions.

### 2. Définition du jardinier



La plus ancienne est la "définition du jardinier" : on se donne deux points,  $F_1, F_2$  appelés foyers, et une ficelle de longueur  $2a$ , accrochée aux deux points en ses extrémités, et on tourne autour des foyers ; formellement, cela s'écrit :

$$MF_1 + MF_2 = 2a .$$

### 3. Equation cartésienne

La définition la plus répandue, y compris dans l'enseignement, est sous forme d'équation cartésienne ; l'ellipse est l'ensemble des points dont les coordonnées  $(x, y)$  sont liées par la relation :

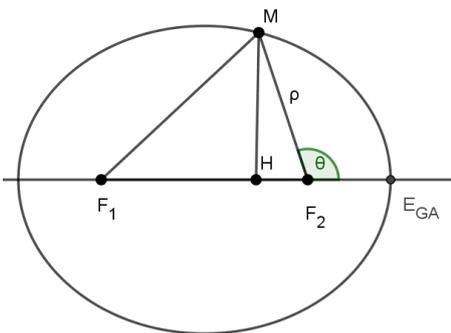
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 .$$

Cette définition a le mérite de bien faire apparaître les deux paramètres  $a$  et  $b$  ; elle a le défaut de ne pas faire apparaître les foyers, contrairement à la définition du jardinier. Nous verrons que l'équation cartésienne est peu utilisable en pratique. Elle requiert un système de coordonnées, nécessairement artificiel. Elle utilise le paramètre  $b$ , qui est artificiel : voir plus loin.

#### 4. Equation intrinsèque

On peut donner une représentation qui ne dépend pas d'un système de coordonnées ; c'est pourquoi nous l'appelons "équation intrinsèque".

Soient  $F_1, F_2$  deux points quelconques du plan, soit  $M$  un point quelconque de l'ellipse et  $H$  sa



projection orthogonale sur la droite  $F_1F_2$ . Selon la position de  $M$ , le point  $H$  peut être à gauche de  $F_1$ , entre  $F_1$  et  $F_2$  ou à droite de  $F_2$ . Notant  $F_2M = \rho$ , on a, orientant l'axe  $F_1F_2$  vers la droite :

$$F_2H = -\rho \cos(\pi - \vartheta) = \rho \cos(\vartheta)$$

$$MH = \rho |\sin(\pi - \vartheta)| = \rho |\sin(\vartheta)|.$$

Si l'on pose, selon les notations usuelles,  $F_1F_2 = 2c$ , on a, dans le triangle  $F_1HM$  :

$$F_1H = F_1F_2 + F_2H = 2c - \rho \cos(\vartheta)$$

et donc :

$$F_1M^2 = F_1H^2 + MH^2 = (2c - \rho \cos(\vartheta))^2 + (\rho \sin(\vartheta))^2$$

Puisque, par définition de l'ellipse,  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , et puisque  $F_1M = 2a - \rho$ , il vient :

$$(2a - \rho)^2 = (2c - \rho \cos(\vartheta))^2 + (\rho \sin(\vartheta))^2$$

et après simplification :

$$a^2 - a\rho - c^2 + c\rho \cos(\vartheta) = 0$$

ce qui donne :

$$\rho = \frac{a^2 - c^2}{a - c \cos(\vartheta)}.$$

Nous verrons par la suite que les paramètres à retenir sont  $a$  (demi-longueur de la ficelle) et  $c$  (demi-distance entre foyers). Les paramètres  $b, e, p$  sont artificiels et se déduisent de ces deux-là.

On écrit habituellement cette formule sous la forme :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos(\mathcal{G})} \quad (1)$$

avec  $p = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ , si  $b$  est le demi-petit axe de l'ellipse, et  $c^2 = a^2 - b^2$ .

La quantité  $e = \frac{c}{a}$  s'appelle l'excentricité (nombre sans dimension). Elle est nulle dans le cas d'un cercle.

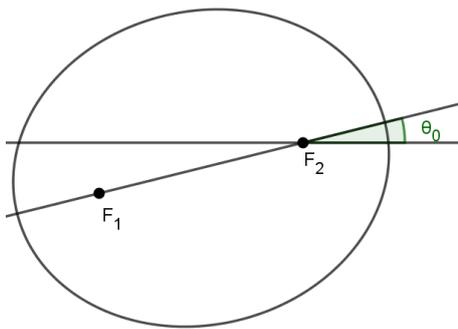
La forme (1) s'appelle "équation intrinsèque" de l'ellipse : elle est "intrinsèque" en ce sens qu'elle ne fait appel à aucun référentiel. L'angle  $\mathcal{G}$  est l'angle entre les vecteurs  $\overrightarrow{F_1 F_2}$  et  $\overrightarrow{F_2 M}$ .

Il résulte immédiatement de la formule (1) que le  $\rho$  minimal est obtenu pour  $\mathcal{G} = 0$ ,  $\cos(\mathcal{G}) = 1$ ,

$\rho_{\min} = \frac{p}{1 - e}$ . Le  $\rho$  maximal est obtenu pour  $\mathcal{G} = \pi$ ,  $\cos(\mathcal{G}) = -1$ ,  $\rho_{\max} = \frac{p}{1 + e}$ .

Le centre du repère est ici un foyer de l'ellipse, ce qui correspond à la situation du mouvement des planètes : voir plus bas.

Si l'axe de référence n'est pas la droite joignant les foyers, mais un axe quelconque, l'équation sera mise sous la forme :



$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)}$$

Le minimum de  $\rho$  sera obtenu pour  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$ , ce qui donne l'orientation de l'axe joignant les foyers.

## 5. Equation en coordonnées polaires

Si on part de l'équation cartésienne vue plus haut et que l'on pose, dans ce référentiel,  $x = \rho \cos(\mathcal{G})$ ,  $y = \rho \sin(\mathcal{G})$ , on obtient l'équation :

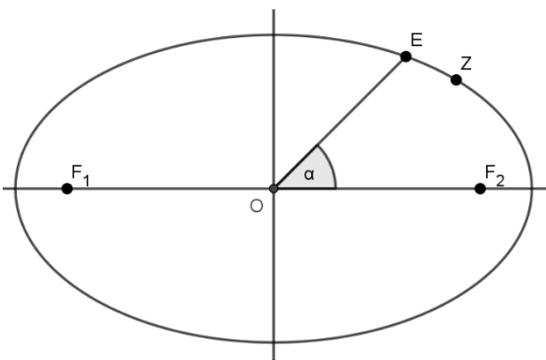
$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2(\mathcal{G}) + b^2 \cos^2(\mathcal{G})}} \quad (1)$$

Ici, le centre du repère est le centre de l'ellipse, qui n'a pas de réalité physique dans le mouvement des planètes (voir plus bas). Cette représentation de l'ellipse n'est donc pas recommandée.

On peut aussi écrire l'équation sous forme paramétrique, dans un repère lié au centre de l'ellipse :

$$x = a \cos(\vartheta), y = b \sin(\vartheta),$$

auquel cas :  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2 \cos^2(\vartheta) + b^2 \sin^2(\vartheta)}$  (2)

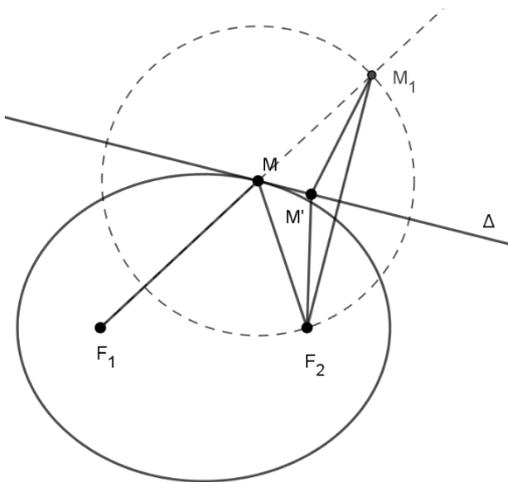


Il faut bien voir que le  $\rho$ , le  $\vartheta$  et les points  $(x, y)$  ne sont pas les mêmes selon que l'on choisit la représentation (1) ou (2). Dans l'ellipse ci-contre, nous avons  $a = 5, b = 3$  ; le point de coordonnée polaire  $\vartheta = \pi/4$  est le point  $E$ . Le point noté  $Z$  a pour coordonnées paramétriques :

$$\left( a \cos \frac{\pi}{4}, b \sin \frac{\pi}{4} \right) = \left( \frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right) \approx (3.54, 2.12)$$

## 6. Tangente à l'ellipse

Cette construction, purement géométrique, était connue des anciens Grecs. Elle ne requiert aucun système de coordonnées.



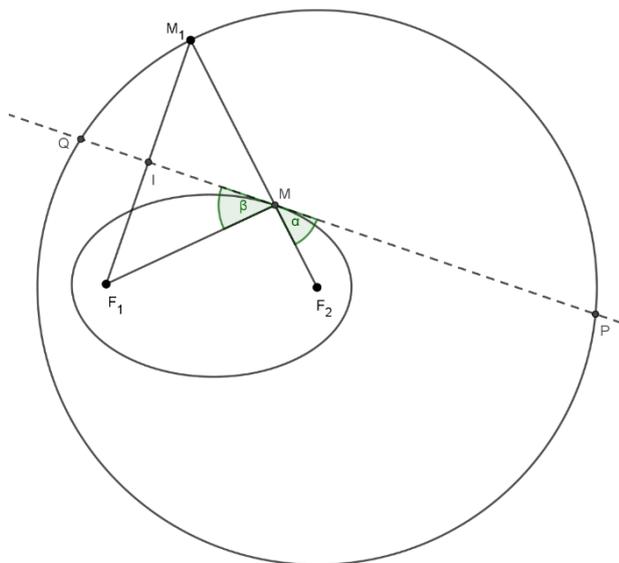
Soit  $M$  un point quelconque de l'ellipse et  $M_1$ , dans le prolongement de  $F_1M$ , tel que  $F_2M = MM_1$  ( $M_1$  est donc sur le cercle de centre  $M$ , passant par  $F_2$ ). La médiatrice  $\Delta$  du segment  $F_2M_1$  passe évidemment par le point  $M$ . Nous allons voir qu'elle ne contient aucun autre point de l'ellipse ; elle est donc tangente à l'ellipse au point  $M$ .

Soit  $M'$  un autre point de la droite  $\Delta$ . On a :

$$F_1M' + M'F_2 = F_1M' + M'M_1 > F_1M + MM_1 = 2a.$$

Par conséquent, le point  $M'$  est extérieur à l'ellipse, ce qui prouve notre assertion.

## 7. Propriété de focalisation



**Proposition.** - *Tout rayon lumineux, issu de l'un des foyers, est renvoyé par l'ellipse vers l'autre foyer.*

**Démonstration.** - Soit  $M$  un point quelconque de l'ellipse,  $PQ$  la tangente à l'ellipse au point  $M$ . On va montrer que les angles  $\alpha = F_2MP$  et  $\beta = F_1MQ$  sont égaux ; en d'autres termes, un rayon lumineux issu du foyer  $F_2$ , touchant l'ellipse en  $M$ , est renvoyé vers le foyer  $F_1$  (et inversement, bien sûr).

Pour cela, nous traçons le cercle de centre  $F_2$  et de rayon  $2a$ . Soit  $M_1$  l'intersection de la droite  $F_2M$  avec le cercle. On a  $M_1M = 2a - F_2M$  et donc  $MM_1 = MF_1$ .

Nous traçons les segments  $F_1M$ ,  $F_2M$ , puis la médiatrice du segment  $F_1M_1$ . Elle coupe ce segment en  $I$  et le segment  $F_2M_1$  en  $M$ , d'après la propriété précédente. On a  $MF_1 = MM_1$  et donc  $MF_1 + MF_2 = 2a$ , quelle que soit la position de  $M$  sur le cercle. Le point  $M$  est sur l'ellipse et tout autre point  $M'$  de la médiatrice vérifiera  $M'F_1 + M'F_2 > 2a$ , et sera extérieur à l'ellipse. Donc cette médiatrice est bien tangente à l'ellipse au point  $M$ .

Par ailleurs, l'angle  $F_2MP$  est égal à l'angle  $QMM_1$ , lui-même égal à  $QMF_1$ , donc  $QMF_1 = F_2MP$  et la proposition est démontrée.

## 8. Périmètre de l'ellipse

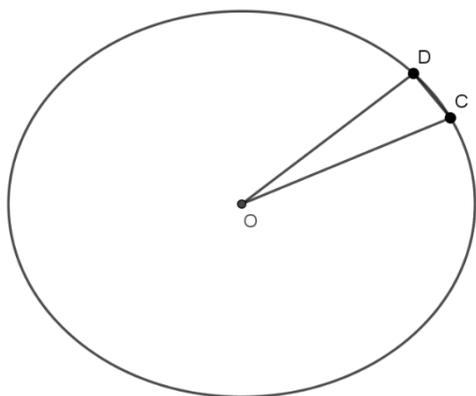
On cherche à calculer le périmètre d'une ellipse, d'axes  $a, b$ .

**Proposition.** – *Le périmètre de l'ellipse est donné par la formule :*

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt.$$

**Démonstration.** – On se donne l'ellipse sous forme paramétrique :

$$x = a \cos(t), y = b \sin(t).$$



On découpe l'ellipse au moyen de petits angles au centre de taille  $\frac{2\pi}{N}$ . Le morceau de l'ellipse est assimilé à un petit segment, ici  $CD$  sur la figure. La longueur de ce petit segment est  $\sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$  ; ici :

$$l_k = \sqrt{a^2 \left( \cos\left(\frac{(k+1)2\pi}{N}\right) - \cos\left(\frac{k2\pi}{N}\right) \right)^2 + b^2 \left( \sin\left(\frac{(k+1)2\pi}{N}\right) - \sin\left(\frac{k2\pi}{N}\right) \right)^2}$$

et lorsque  $N \rightarrow +\infty$ , la somme  $\sum_{k=1}^N l_k \rightarrow L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)} dt$  comme annoncé.

Une remarque intéressante est que le périmètre de l'ellipse n'est pas le périmètre d'un cercle ayant pour rayon le rayon moyen de l'ellipse.

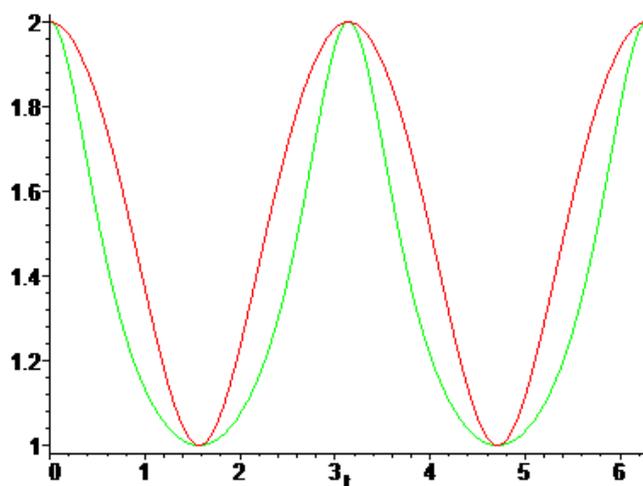
Le rayon de l'ellipse correspondant à un angle  $\vartheta$  est  $\rho = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\vartheta) + a^2 \sin^2(\vartheta)}}$ .

Le rayon moyen est donc :

$$\rho_{\text{moyen}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\vartheta) + a^2 \sin^2(\vartheta)}} d\vartheta,$$

et le périmètre du cercle ayant ce rayon moyen sera :

$$\text{périmètre\_cercle} = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\vartheta) + a^2 \sin^2(\vartheta)}} d\vartheta.$$



Les deux fonctions à intégrer ne coïncident pas ; voici les graphes.

Il n'existe pas de formule explicite donnant le périmètre de l'ellipse. L'intégrale ci-dessus s'appelle "intégrale elliptique", pour des raisons évidentes.

### 9. Transformations géométriques préservant le périmètre

La Nature réalise une transformation très simple, d'une ellipse en cercle, préservant le périmètre. Il s'agit simplement de "gonfler" l'ellipse. Imaginons que le contour soit réalisé à l'aide d'un câble inextensible, mais déformable (une chaîne de moto). Prenons une ellipse quelconque et soufflons à l'intérieur : l'ellipse va se déformer et la position limite sera celle pour laquelle la pression est partout la même ; ce sera donc un cercle.

On ne sait pas décrire précisément une transformation mathématique ayant cette propriété.

### 10. Aire d'un secteur elliptique

Lorsque nous verrons les lois de Kepler, plus bas, il sera utile d'avoir une formule explicite pour calculer l'aire d'un secteur elliptique. Deux approches sont possibles : en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.

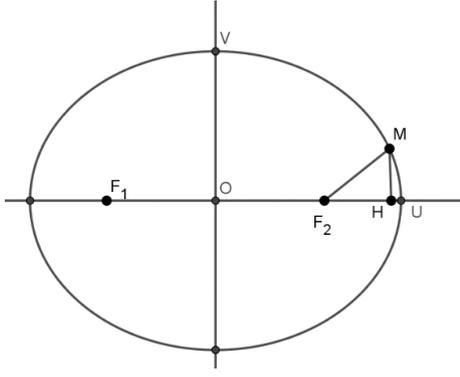
#### - En coordonnées cartésiennes

On se donne l'ellipse par ses coordonnées cartésiennes :

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , d'où  $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$  pour la partie supérieure. Il existe une primitive explicite pour cette fonction :

$$F(x) = \frac{b}{2} \left( x\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + a \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \right) + C.$$

On a  $C = 0$ , puisque pour  $x = 0$ ,  $F(0) = 0$  ; si  $x = a$ ,  $F(a) = \frac{\pi ab}{4}$  : aire du quart de l'ellipse. On en déduit que l'aire de l'ellipse tout entière est  $\pi ab$ .



Pour chaque position du point  $M$  d'abscisse  $x$ , on connaît l'aire du secteur elliptique  $MHU$  (secteur à droite de la verticale passant par  $M$ ). Elle s'exprime par la formule :

$$\text{Aire\_secteur\_MHU} = F(a) - F(x).$$

D'où :

$$\text{Aire\_secteur\_MHU} = \frac{\pi ab}{4} - \frac{b}{2} \left( x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + a \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right).$$

Le foyer  $F_2$  ayant pour coordonnées  $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ , si  $M$  est à droite de  $F_2$ , l'aire du triangle  $F_2HM$  est :

$$\text{aire}(\text{triangle}_{F_2HM}) = \frac{1}{2} \left( x - \sqrt{a^2 - b^2} \right) b \left( \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right),$$

et l'aire totale du secteur elliptique  $F_2UM$  est la somme des deux :

$$\begin{aligned} A(x) &= \text{aire}(\text{secteur}_{F_2UM}) = \frac{b}{2} \left( x - \sqrt{a^2 - b^2} \right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\pi ab}{4} - \frac{b}{2} \left( x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + a \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right) \\ &= \frac{b}{2} \left( \left( x - \sqrt{a^2 - b^2} \right) \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\pi a}{2} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - a \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right) \\ &= \frac{b}{2} \left( x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\pi a}{2} - x \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - a \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right) \\ &= \frac{b}{2} \left( -\sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} + \frac{\pi a}{2} - a \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right) \end{aligned}$$

D'où la formule :

$$\begin{aligned} \text{aire}(\text{secteur}_{F_2UM}) &= \frac{b}{2} \left( \frac{\pi a}{2} - \sqrt{a^2 - b^2} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - a \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right) \\ &= \frac{ab}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \sqrt{\left( 1 - \frac{b^2}{a^2} \right) \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right)} - \arcsin \left( \frac{x}{a} \right) \right). \end{aligned}$$

Posant  $\frac{x}{a} = \sin(\varphi)$ , il vient, puisque  $c^2 = a^2 - b^2$  :

$$\text{aire}(\text{secteur}_{F_2UM}) = \frac{ab}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \frac{c}{a} \cos(\varphi) - \varphi \right)$$

ou encore :

$$\text{aire}(\text{secteur}_{F_2UM}) = \frac{b}{2} \left( \frac{\pi a}{2} - a\varphi - c \cos(\varphi) \right).$$

La fonction  $f(x) = ax + c \cos(x)$  a pour dérivée  $f'(x) = a - c \sin(x) > 0$  puisque  $a > c$ . Il en résulte que la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $[0, 1]$ .

### - En coordonnées polaires

Soit une surface du plan délimitée par la courbe continue  $r(\theta)$  et les demi-droites  $\mathcal{G} = a$  et  $\mathcal{G} = b$ , où  $0 < b - a < 2\pi$  ( $a$  et  $b$  étant des réels). Alors l'aire  $S$  de cette surface est :

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\mathcal{G}) d\mathcal{G}.$$

Si l'ellipse est donnée par l'équation intrinsèque :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)}$$

et si l'on prend le point  $U$  comme origine des angles ( $\mathcal{G} = 0$ ), le point  $M$  correspondant à l'angle  $\mathcal{G}$ , l'aire du secteur  $F_2UM$  sera :

$$A = \text{aire}(\text{secteur}_{F_2UM}) = \frac{p^2}{2} \int_0^{\mathcal{G}} \frac{1}{(1 - e \cos(\eta))^2} d\eta$$

On peut calculer explicitement cette intégrale. On trouve, avec  $\tau = \tan\left(\frac{\mathcal{G}}{2}\right)$ ,  $y = \arctan \frac{(1+e)\tau}{\sqrt{1-e^2}}$  :

$$A = \frac{p^2}{1-e^2} \left( \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{e\tau}{\tau^2(1+e)+1-e} \right) = b^2 \left( \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{e\tau}{\tau^2(1+e)+1-e} \right)$$

or  $\tau^2 = \tan^2\left(\frac{\mathcal{G}}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\mathcal{G})}{1 + \cos(\mathcal{G})}$ , et donc :

$$A = b^2 \left( \frac{y}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{e\tau(1+\cos(\vartheta))}{2(1-e\cos(\vartheta))} \right)$$

ou encore :

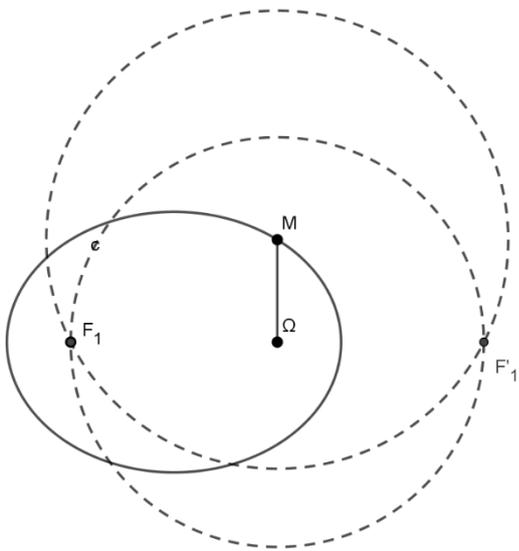
$$A = \frac{b^2}{\sqrt{1-e^2}} \arctan \frac{(1+e)\tau}{\sqrt{1-e^2}} + b^2 \frac{e \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)(1+\cos(\vartheta))}{2(1-e\cos(\vartheta))}$$

ce qui s'écrit :

$$A = ab \arctan \frac{(1+e) \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{b^2 e}{2} \tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \frac{1+\cos(\vartheta)}{1-e\cos(\vartheta)}$$

Pour  $\vartheta = \pi$ ,  $\tau = +\infty$ ,  $y = \frac{\pi}{2}$ , on trouve bien  $A = \frac{\pi ab}{2}$ , surface de la moitié de l'ellipse.

Comme nous l'avons déjà dit, il sera bon, pour l'étude de l'ellipse, de fournir les résultats en n'employant que deux paramètres, à savoir  $a, c$  :  $2a$  est la longueur de la ficelle qui permet de tracer l'ellipse et  $2c$  est la distance entre foyers. Tous les autres paramètres, à savoir  $b, p, e$ , se déduisent de ceux-là. On peut les utiliser dans le cours des calculs, par exemple pour faire un changement de variable, mais les résultats devraient être donnés en termes de  $a, c$ .



La représentation géométrique aide à bien comprendre les contraintes. Par exemple, dans la figure ci-contre, on connaît  $a, c$  et un point  $M$ . Le second foyer va donc se trouver à l'intersection de deux cercles :

- Le cercle de centre  $\Omega$ , de rayon  $2c$  ;
- Le cercle de centre  $M$ , de rayon  $2a - \Omega M$

Il y aura donc deux positions possibles pour le second foyer, entre lesquelles il faudra trancher par raisonnement (une programmation aveugle conduira à des erreurs).

## Seconde Partie

### L'ellipse et les orbites des planètes

L'ellipse joue un rôle fondamental dans la compréhension des lois de la Nature puisque, selon les lois de Kepler, tout corps en rotation autour d'un autre décrit une orbite elliptique. Pour la présentation, nous nous limitons au cas d'une planète autour du Soleil, cas que Kepler avait considéré. Nous distinguerons entre forme de l'orbite et mouvement sur cette orbite. La forme de l'orbite est statique ; le mouvement est dynamique.

#### I. Première Loi de Kepler

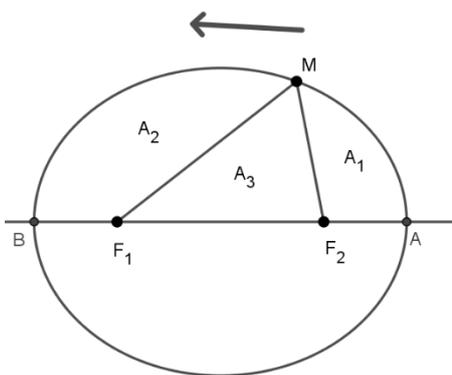
La première loi s'énonce : l'orbite est constamment située dans un plan fixe. Elle constitue une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Il n'était nullement évident, a priori, que l'orbite serait astreinte à rester dans un plan : elle pourrait consister en des oscillations en 3d. Il n'est pas non plus évident que le plan soit fixe : il pourrait osciller au cours du temps.

On pose souvent la question (naïve, mais très pertinente) : qu'y a-t-il à l'autre foyer ? La réponse, en ce qui concerne le système solaire est : physiquement, rien. Mais la rotation de la planète autour du Soleil peut se faire dans un sens ou dans l'autre et on peut regarder le système du dessus ou du dessous : les deux foyers jouent des rôles symétriques et une représentation mathématique, comme Kepler la présente, ne peut se contenter d'un seul foyer.

Voyons ici un paradoxe apparent :

Considérons une ellipse très ordinaire, de demi grand axe  $a$  et demi petit axe  $b$ . Un satellite très ordinaire décrit cette ellipse, en obéissant aux lois de Kepler. On note  $F_1, F_2$  les foyers et  $M$  la position du satellite. Celui-ci décrit l'ellipse dans le sens trigonométrique (la flèche sur la figure).



Selon la seconde loi (que nous verrons plus loin), le segment  $F_2M$  décrit des aires égales en des temps égaux ; par conséquent, l'aire  $A_1$ , limitée par  $F_2A$  et  $F_2M$ , croît linéairement avec le temps. Si l'origine des temps est prise lorsque  $M$  est en  $A$ , l'aire  $A_1$  vaut :

$$A_1(t) = \frac{\pi ab}{T} t$$

où  $T$  désigne la période de révolution du satellite (temps total qu'il met pour parcourir une orbite). On sait en effet que l'aire de l'ellipse vaut  $\pi ab$ .

De la même façon, le segment  $F_1M$  décrit des aires égales en des temps égaux ; par conséquent, l'aire  $A_2$ , limitée par  $F_1M$  et  $F_1B$ , décroît linéairement avec le temps. Elle s'écrit :

$$A_2(t) = -\frac{\pi ab}{T}t + \frac{\pi ab}{2} \text{ puisque cette aire vaut } \frac{\pi ab}{2} \text{ pour } t=0 \text{ et } 0 \text{ pour } t = \frac{T}{2}.$$

Soit  $A_3(t)$  l'aire limitée par le triangle  $F_1MF_2$  ; on a évidemment :

$$A_1(t) + A_2(t) + A_3(t) = \frac{\pi ab}{2} : \text{ moitié supérieure de l'ellipse.}$$

Mais alors :

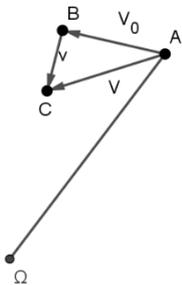
$$\frac{\pi ab}{T}t - \frac{\pi ab}{T}t + \frac{\pi ab}{2} + A_3(t) = \frac{\pi ab}{2}$$

d'où résulte que  $A_3(t) = 0$ , ce qui est absurde. Où est l'erreur ?

L'erreur tient au fait que le Soleil ne peut être aux deux foyers en même temps : s'il est au second foyer, le rayon  $F_2M$  décrit des aires égales en des temps égaux, mais ce n'est pas le cas du rayon  $F_1M$ . Une ellipse au sens de Kepler n'est pas une ellipse ordinaire au sens géométrique.

Chose étonnante : la première loi de Kepler n'impose aucune restriction à la forme de l'ellipse. N'importe quelle ellipse, qu'elle soit très arrondie ou très allongée, peut être la trajectoire d'une planète. Il faudra seulement que le Soleil soit situé en l'un des foyers. La masse de la planète peut être quelconque. Ces propriétés ne sont pas du tout intuitives.

Le fait que l'ellipse soit constamment dans un plan fixe est par contre assez intuitif, comme on va le voir.



Soit  $\Omega$  le centre de la Terre et  $A$  une position de la planète ; elle est animée d'une vitesse  $\vec{V}_0$ . Soit  $B$  l'extrémité de  $\vec{V}_0$ . Les trois points  $\Omega, A, B$  déterminent un plan. S'il n'y avait pas de force d'attraction, la planète se retrouverait en  $B$ . La force d'attraction la ramène en  $C$ , qui est sur la droite  $BA$ , donc dans le même plan que précédemment, et ainsi de suite à tous les instants de la trajectoire.

Le fait que la trajectoire soit une ellipse sera démontré plus loin. C'est beaucoup plus difficile et n'est pas vrai en toute circonstance : si on lance un satellite avec vitesse initiale insuffisante, il s'écrase sur la planète ; si la vitesse initiale est excessive, il se perd dans l'espace.

## II. Détermination de la trajectoire de la planète

A priori, on connaît seulement la relation résultant de la gravitation universelle :

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (1)$$

où  $G$  est la constante universelle de gravitation,  $M$  est la masse du Soleil,  $m$  celle de la planète et  $r$  la distance qui les sépare. La première loi de Kepler dit que la planète décrit une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers. Ce n'est pas tout à fait exact : c'est le barycentre (Soleil, Terre) qui se trouve au foyer. Mais comme le Soleil est beaucoup plus gros, on peut admettre l'approximation. Nous y reviendrons plus loin.

On déduit de (1) :

$$\gamma = \frac{GM}{r^2} \quad (2)$$

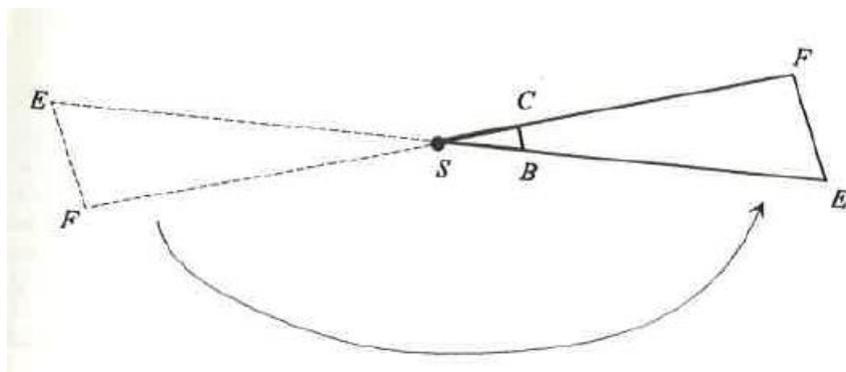
où  $\gamma$  est l'accélération de la planète, dirigée vers le centre du Soleil, considéré comme fixe.

Il n'est pas facile de déduire la forme de l'orbite à partir de (2), d'autant que cette forme dépend des conditions initiales, qui n'apparaissent pas dans (2).

## III. Une erreur de Richard Feynman

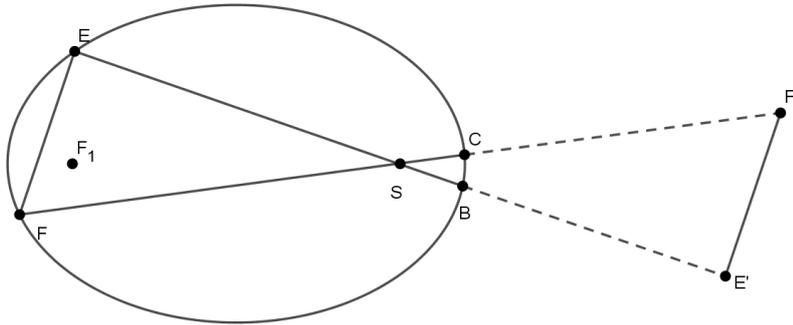
L'énoncé donné dans [Feynman], page 126 : "nous avons prouvé que les lois de Newton, avec une force de gravité en  $r^{-2}$  dirigée vers le Soleil, engendrent des orbites planétaires elliptiques" est évidemment faux : en fonction des conditions initiales, la trajectoire peut être une hyperbole.

Pour sa démonstration, Feynman décide de découper l'orbite en secteurs de même angle au centre, et non plus de même temps. Il dit, page 105 : "nous savons que la planète va plus vite de B à C que de E à F. Pour savoir exactement combien de fois plus vite, nous devons comparer les surfaces des triangles SBC et SEF, puisque les intervalles de temps sont proportionnels aux surfaces balayées. Rappelez-vous que les deux triangles ont le même angle en S. En pivotant SEF de façon à ce qu'il recouvre SBC, on obtient :



(figure reproduite de [Feynman], page 105)

Il affirme ensuite que les deux triangles SEF et SBC sont semblables. C'est évidemment faux. La figure ci-dessous reproduit la précédente :



Le triangle SE'F' est le symétrique de SEF par rapport à S. Il est complètement évident que SBC et SE'F' ne sont pas semblables : BC n'est pas parallèle à E'F'.

#### IV. Comment procéder ?

Il n'est pas facile de déduire la forme de la trajectoire directement de la loi de l'attraction, d'autant que, comme nous l'avons dit, la trajectoire dépend des conditions initiales. Il nous paraît impossible de le faire par des considérations de géométrie élémentaire, comme Feynman prétend le faire. On peut assurément résoudre l'équation (2) et les constantes qui interviendront dans la résolution détermineront la forme de la trajectoire.

La meilleure méthode paraît être de recourir à une expression sous forme d'énergie. Du fait de la pesanteur, la planète a une énergie potentielle  $E_p = -\frac{GmM}{r}$  où  $G$  est la constante universelle de gravitation et du fait du mouvement, une énergie cinétique  $E_c = \frac{1}{2}mv^2$  et la somme des deux, appelée énergie mécanique  $E_m$ , doit rester constante. Sous cette forme, on a l'impression que la masse de la planète apparaît ; or on sait qu'elle n'intervient pas dans la forme de la trajectoire. Il faut donc écrire l'équation en faisant référence aux conditions initiales :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GmM}{r_0}$$

Si l'on pose  $\mu = GM$ , ceci se simplifie en :

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}$$

On résout ceci en passant en coordonnées polaires ; en notant  $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ ,  $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$ , on obtient les équations :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{C^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = cste \\ r^2\dot{\vartheta} = C \end{cases}$$

En posant  $u = \frac{1}{r}$ , on trouve :

$$u(\vartheta) = \frac{\mu}{C^2} + A \cos(\vartheta - \vartheta_0)$$

d'où l'expression :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)}, \text{ avec } p = \frac{C^2}{\mu}.$$

La constante  $C$  s'appelle "constante des aires" ; elle vaut donc :

$$C = \sqrt{p\mu}.$$

Le type de trajectoire se déduit du signe de l'énergie mécanique ; elle est elliptique si et seulement si  $E_m < 0$ , c'est-à-dire, pour les conditions initiales :

$$\frac{1}{2}v_0^2 < \frac{\mu}{r_0}, \text{ ou encore } r_0 v_0^2 < 2\mu.$$

Lorsque les paramètres de l'ellipse sont connus ( $a, b$ , d'où l'on déduit  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ ), on peut calculer explicitement l'aire d'un secteur elliptique d'angle  $\vartheta$  ; la seconde loi de Kepler stipule que cette aire sera la même, où que soit le secteur elliptique sur l'orbite, pourvu que l'angle  $\vartheta$  soit le même.

On remarquera que, dans ces questions, la constante universelle de gravitation  $G$  et la masse du Soleil  $M$  n'interviennent pas séparément, mais seulement sous la forme du produit  $\mu = GM$ .

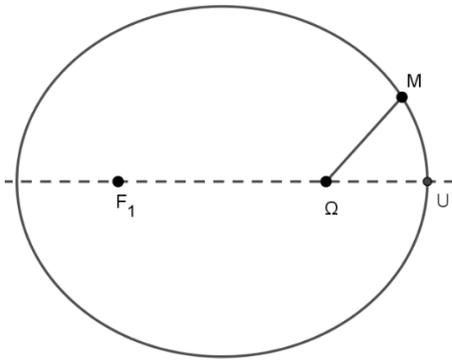
On ne sait pas comment Kepler a pu avoir l'intuition d'une telle loi et comment il a pu calculer l'aire des secteurs angulaires à partir des données disponibles à l'époque (visées angulaires de Tycho Brahé). Les coordonnées cartésiennes n'existaient pas à l'époque (Descartes est postérieur à Kepler). Sans doute Kepler a-t-il eu recours à une discrétisation, comme le faisait Archimède. Les étapes de son travail ne nous sont pas parvenues.

## Troisième Partie

### Le mouvement d'un satellite

Nous avons vu précédemment que le mouvement devait se faire selon une orbite elliptique : cela donne la géométrie de l'orbite. Reste à déterminer la loi du mouvement.

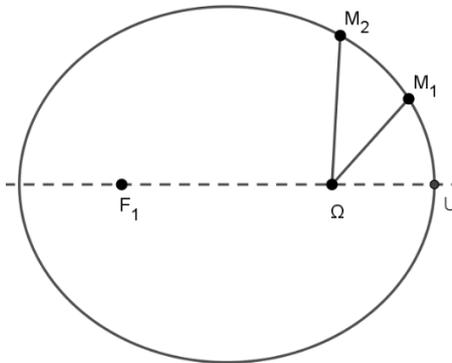
#### I. Seconde Loi de Kepler



La seconde loi de Kepler stipule que le rayon vecteur Soleil-Planète parcourt des aires égales en des temps égaux.

Dans la figure ci-contre,  $\Omega$  désigne la position du Soleil, qui est à l'un des foyers de l'ellipse (et non au centre),  $M$  désigne la position de la planète sur l'ellipse. Le point  $U$  est à l'extrémité du grand axe, du côté de  $\Omega$  : c'est l'intersection de l'ellipse avec le prolongement du vecteur  $\overrightarrow{F_1\Omega}$ .

La seconde loi dit que l'aire du secteur elliptique  $U\Omega M$  est proportionnelle au temps mis par la planète pour aller de  $U$  à  $M$ .



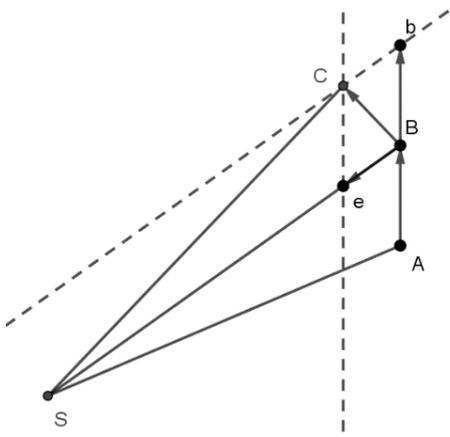
Cela revient à dire que, si les secteurs elliptiques  $U\Omega M_1$  et  $M_1\Omega M_2$  ont même aire, le temps mis par la planète pour aller de  $U$  à  $M_1$  sera égal au temps qu'elle mettra pour aller de  $M_1$  à  $M_2$ .

Attention : les aires ne sont pas mesurées à partir du centre de l'ellipse, mais à partir de la position du Soleil : point  $\Omega$ , second foyer de l'ellipse.

La proposition suivante est reproduite de Feynman, qui la tenait de Newton, qui la tenait de Kepler, qui la tenait d'Archimède :

##### 1. Approche générale

**Proposition.** – *Si un mouvement plan résulte d'une force centrale, le rayon vecteur décrit des aires égales en des temps égaux.*



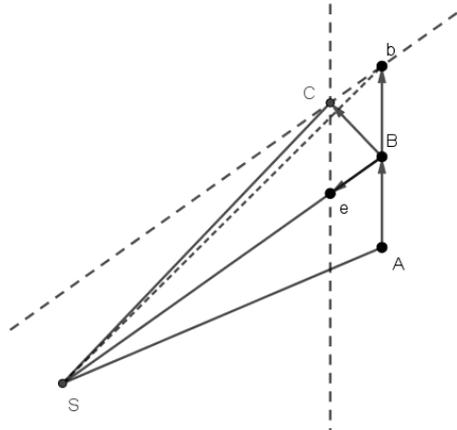
Le point essentiel est qu'aucune hypothèse sur la nature de la force n'est imposée ; elle n'a pas à être en  $1/r^2$ . La démonstration se fait selon les méthodes d'Archimède.

**Démonstration.** – Soit une planète gravitant autour du Soleil (en  $S$ ). On discrétise le mouvement de la planète, initialement en  $A$ . Au bout d'un intervalle de temps, la planète se retrouve en  $B$ . Elle est attirée par le Soleil, situé au point  $S$ .

Au point  $B$ , si elle continuait par inertie, sans attraction, elle se retrouverait en  $b$  avec  $\overline{AB} = \overline{Bb}$ . Si elle était immobile en  $B$ , elle se dirigerait vers  $S$  et se retrouverait en  $e$ , sur le segment  $BS$ . En définitive, elle se retrouve en  $C$ , tel que  $\overline{BC} = \overline{Bb} + \overline{Be}$  (somme vectorielle : voir figure).

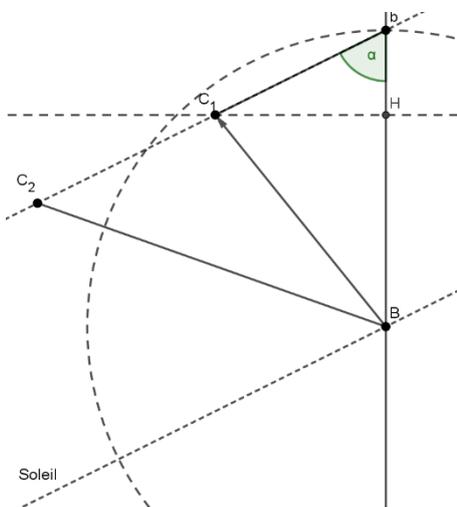
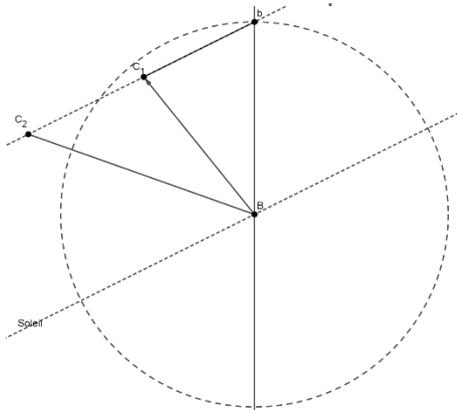
Les triangles  $SAB$  et  $SBb$  ont la même aire : ils ont un côté commun ( $SB$ ) et des hauteurs égales, puisque  $AB = Bb$ .

Reste à montrer que  $SBb$  et  $SBC$  ont la même aire. Comme  $bC$  est parallèle à  $BS$ , les hauteurs menées de  $b$  et  $C$  sur  $BS$  ont même longueur, ce qui prouve la Proposition.



Voyons dans quel cas la vitesse augmente, d'un pas de temps à l'autre, et dans quel cas elle diminue.

Le premier trajet est  $AB$  et le second  $BC$  ; ils se font en des temps égaux. La vitesse va augmenter si  $BC \geq AB$ . Nous sommes en présence d'un parallélogramme, à savoir  $eBbC$ , où  $Bb = AB$  est l'un des côtés et  $BC$  est une diagonale. Il suffit de regarder le triangle  $BbC$  et de se demander quand  $BC \leq Bb = AB$ . Pour cela, on trace le cercle de centre  $B$  et de rayon  $Bb = AB$  ; si le point  $C$  est à l'intérieur de ce cercle, la vitesse diminue. Cela dépend du module et de l'orientation du vecteur  $\overline{Be}$  qui caractérise la force de rappel. Or l'orientation de ce vecteur est fixe : vers le Soleil. L'angle  $BbC$  est connu : angle de la vitesse  $\overline{AB}$  avec la direction du Soleil,  $Be$ . Tout dépend donc du module de la force de rappel : si elle est trop faible, le point  $C$  est à l'intérieur du cercle ; si elle est suffisante,  $C$  est à l'extérieur du cercle.



Plus précisément, notons  $l = bC = Be$  et  $\alpha = BbC$  ; on a :  $bH = l \cos(\alpha)$ ,  $BH = a - l \cos(\alpha)$ ,  $CH = l \sin(\alpha)$ , d'où :  $BC^2 = BH^2 + CH^2 = a^2 - 2la \cos(\alpha) + l^2$  et la condition  $BC \leq a$  (ralentissement) se traduit donc par  $l \leq 2a \cos(\alpha)$ .

Voici une version moderne, en coordonnées polaires :

## 2. En coordonnées polaires

On rappelle que, en coordonnées polaires, les composantes de la vitesse sont  $(\dot{r}, r\dot{\vartheta})$  et celles de l'accélération  $(\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2, r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta})$ . Comme la force est centrale, on a :

$$r\ddot{\vartheta} + 2\dot{r}\dot{\vartheta} = 0,$$

d'où :

$$\frac{\ddot{\vartheta}}{\dot{\vartheta}} = -\frac{2\dot{r}}{r},$$

et par intégration :

$$\text{Log}(\dot{\vartheta}) = \text{Log}(r^{-2}) + C,$$

d'où :

$$r^2\dot{\vartheta} = \text{cste}.$$

**Proposition.** - *En coordonnées polaires, l'énoncé "aires égales en des temps égaux" se traduit par :*

$$r^2\dot{\vartheta} = C,$$

où  $r, \vartheta$  sont les coordonnées polaires intrinsèques (donc liées au foyer et non au centre) et  $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$ .

### Démonstration

(voir [https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées\\_polaires](https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées_polaires), calcul intégral)

Soit  $A$  une surface du plan délimitée par la courbe continue  $r(\theta)$  et les demi-droites  $\vartheta = a$  et  $\vartheta = b$ , où  $0 < b - a < 2\pi$  ( $a$  et  $b$  étant des réels). Alors l'aire  $S$  de cette surface est :

$$S = \frac{1}{2} \int_a^b r^2(\vartheta) d\vartheta.$$

Si on prend  $\vartheta(0) = 0$ , l'aire entre le temps  $t = 0$  et le temps  $t$  doit être proportionnelle à  $t$  :

$$\int_a^{\vartheta(t)} r^2(u) du = \lambda t$$

et en dérivant par rapport à  $t$  :

$$r^2(\mathcal{G}(t))\dot{\mathcal{G}}(t) = \lambda.$$

Ceci prouve la Proposition. La constante  $C$  ci-dessus s'appelle "constante des aires" ; elle est déterminée par les conditions initiales. L'aire parcourue par le rayon vecteur par unité de temps est égale à  $C/2$ .

### 3. Mouvement angulaire

On a vu plus haut que l'aire du secteur elliptique était donnée par :

$$A = ab \arctan \frac{(1+e) \tan\left(\frac{\mathcal{G}}{2}\right)}{\sqrt{1-e^2}} + \frac{b^2 e}{2} \tan\left(\frac{\mathcal{G}}{2}\right) \frac{1+\cos(\mathcal{G})}{1-e\cos(\mathcal{G})}$$

Il en résulte que le mouvement angulaire  $\mathcal{G}(t)$  est solution de l'équation implicite :

$$ab \arctan \frac{(1+e) \tan\left(\frac{\mathcal{G}(t)}{2}\right)}{\sqrt{1-e^2}} - \frac{b^2 e}{2} \tan\left(\frac{\mathcal{G}(t)}{2}\right) \left( \frac{1+\cos(\mathcal{G}(t))}{1-e\cos(\mathcal{G}(t))} \right) = Ct$$

où  $C$  est la constante des aires.

On en déduit une construction approchée du mouvement de la planète autour du Soleil, comme nous allons maintenant le voir.

## II. Suivi dynamique d'un satellite

### A. Présentation du besoin

Nous avons vu que l'application de la seconde loi de Kepler (le rayon vecteur balaye des aires égales en des temps égaux) ne pouvait se faire sans l'utilisation d'une procédure numérique : il n'existe pas de solution analytique au problème de la localisation d'un satellite à tout instant.

On peut cependant, de manière explicite et sans recours à une procédure numérique, déterminer l'instant où le satellite passera en des points donnés sur sa trajectoire.

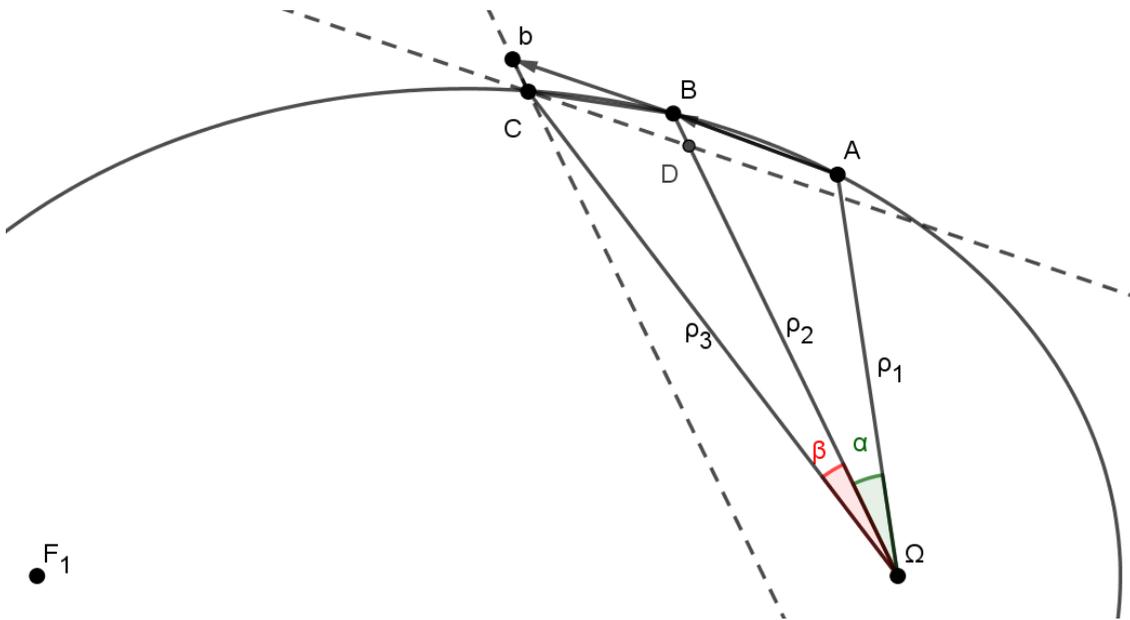
Pour une automobile, c'est l'équivalent du problème suivant : on ne sait pas dire où elle sera à chaque instant, mais on sait dire à quel moment elle franchira les bornes kilométriques.

Néanmoins, une modification d'une méthode présentée par Richard Feynman dans son livre "mouvement des planètes autour du Soleil" (voir plus haut) permet une approche plus directe et plus précise. Ce n'est pas une résolution analytique du problème (laquelle n'est pas possible), mais une résolution par approximation : on remplace les secteurs elliptiques par de petits triangles. La méthode est très efficace et très simple à mettre en œuvre.

## B. Présentation de la méthode

Nous voulons déterminer la trajectoire 2D d'un satellite via la seconde loi de Kepler. La trajectoire est discrétisée en plusieurs points représentant les positions du satellite à divers moments. Selon la seconde loi de Kepler, le temps parcouru par le satellite entre deux points consécutifs est toujours le même.

On utilise la construction par triangles. Les triangles  $\Omega AB$  et  $\Omega BC$  ont même aire. Le point  $b$  est dans le prolongement de  $\overline{AB}$ . La droite  $bC$  est parallèle à  $\Omega B$ .



On donne à  $A$  les coordonnées  $(x_0, y_0)$  et  $B$   $(x_1, y_1)$ . L'équation de l'ellipse est prise sous la forme  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , le centre des axes étant le centre de l'ellipse et le grand axe est pris comme

axe des  $x$ . Le point  $\Omega$  a pour coordonnées  $(c, 0)$ . La pente de  $\Omega B$  est  $\frac{y_B - y_\Omega}{x_B - x_\Omega} = \frac{y_1}{x_1 - c}$ . Le point

$b$  a pour coordonnées  $(2x_1 - x_0, 2y_1 - y_0)$  puisque  $B$  est le milieu de  $A$  et  $b$ . La parallèle à  $\Omega B$  passant par  $b$  a pour équation :

$$y - (2y_1 - y_0) = \frac{y_1}{x_1 - c} (x - (2x_1 - x_0))$$

ou encore :

$$y = \frac{y_1}{x_1 - c} x - 2 \frac{x_1 y_1}{x_1 - c} + \frac{x_0 y_1}{x_1 - c} + \frac{2x_1 y_1 - 2y_1 c}{x_1 - c} - \frac{x_1 y_0 - c y_0}{x_1 - c}$$

$$y = \frac{y_1}{x_1 - c} x + y_1 \frac{x_0 - 2c}{x_1 - c} - y_0$$

L'intersection avec l'ellipse sera le point  $C$ , de coordonnées  $(x_3, y_3)$ , avec :

$$y_3 = \frac{y_1}{x_1 - c} x_3 + y_1 \frac{x_0 - 2c}{x_1 - c} - y_0$$

$$\frac{x_3^2}{a^2} + \frac{y_3^2}{b^2} = 1$$

On obtient une équation du second degré en  $x_3$ . Il faut prendre la valeur la plus proche de  $x_2$  (ou encore celle pour laquelle  $y_3 > 0$  si on travaille sur la demi-ellipse supérieure).

$$\text{On pose : } u = \frac{y_1}{x_1 - c}, v = y_1 \frac{x_0 - 2c}{x_1 - c} - y_0$$

$$y = ux + v, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Les deux racines sont :

$$x = a \frac{-uva \pm b\sqrt{b^2 - v^2 + a^2u^2}}{b^2 + a^2u^2}$$

$$y = \frac{\pm uab\sqrt{b^2 - v^2 + a^2u^2} + b^2v}{b^2 + a^2u^2}$$

On pose  $g = b^2 + a^2u^2$  ; on obtient :

$$x = a \frac{-uva \pm b\sqrt{g - v^2}}{g},$$

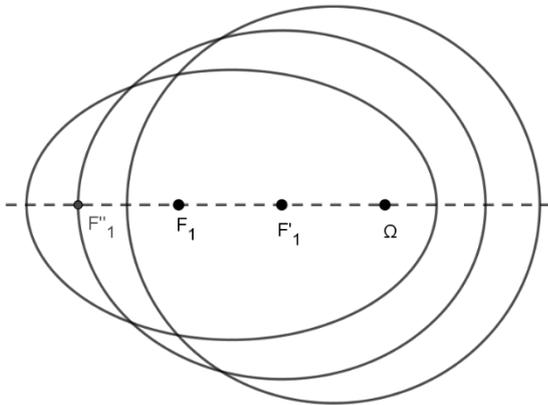
$$y = \frac{\pm uab\sqrt{g - v^2} + b^2v}{g}$$

Les positions successives du satellite sont faciles à déterminer. Le programme requiert les valeurs de  $a$  (demi-grand axe),  $b$  (demi-petit axe),  $\mu$  (constante universelle,  $\mu = GM$ ) et un temps de discrétisation choisi par l'opérateur. Ce temps sert à déterminer l'aire du premier triangle (parce que la durée totale de révolution est connue) et les aires de tous les autres triangles sont égales à l'aire du premier, comme expliqué plus haut.

### III. Troisième Loi de Kepler

Elle stipule que, pour chaque planète, la durée totale d'une rotation est proportionnelle à  $a^{3/2}$ , où  $a$  est, comme précédemment, la longueur du demi grand axe de l'ellipse.

Cette loi est extrêmement surprenante, parce que le petit axe n'apparaît pas. Autrement dit, si deux planètes ont même grand axe et des petits axes différents, elles auront le même temps de révolution.



Sur la figure ci-contre, les trois ellipses ont même foyer  $\Omega$  et même valeur pour le grand axe  $a$  ; les temps de révolution des trois planètes seront donc les mêmes. Mais, bien sûr, comme les longueurs de la trajectoire ne sont pas les mêmes, les vitesses ne seront pas les mêmes.

La démonstration est assez simple, à partir des premières lois. Si  $A(t)$  désigne l'aire parcourue par le rayon vecteur jusqu'au temps  $t$ , on a vu qu'elle était proportionnelle au temps, et donc :

$$\frac{dA(t)}{dt} = \frac{C}{2}, \text{ où } C \text{ est la constante des aires vue précédemment.}$$

En intégrant sur toute une révolution :

$$\frac{A(T)}{T} = \frac{C}{2}, \text{ où } T \text{ est la période : durée d'une révolution.}$$

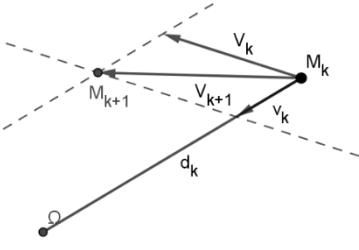
Mais on sait que l'aire de l'ellipse vaut  $\pi ab$ , donc :

$$T = \frac{2\pi ab}{C}.$$

Nous avons vu que :  $C = \sqrt{p\mu}$ , avec  $p = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$ . Il en résulte :

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{\mu}}.$$

## IV. Construction discrétisée d'une ellipse



Nous montrons ici comment construire une ellipse, en utilisant uniquement le fait que, à chaque instant, le mobile est soumis à l'attraction de la planète. C'est ce que voulait faire Feynman, mais nous avons vu plus haut que son approche n'était pas correcte. L'intervalle de temps de discrétisation sera la seconde. A un instant  $t_k$ , la position du mobile sera  $M_k$  et il est animé d'une vitesse  $\vec{V}_k$ .

On considère que, à cet instant, il est brutalement soumis à l'attraction de la pesanteur, sous la forme d'une accélération  $\gamma = \frac{c}{d_k^2}$ , où  $d_k$  est la distance entre  $\Omega$ , position de la planète, et le mobile  $M_k$ . Cette accélération est dirigée vers  $\Omega$ . Elle se manifeste par une variation instantanée de vitesse  $\gamma = \frac{v-v_0}{\tau}$ , où  $\tau$  est l'intervalle de temps, ici une seconde. La vitesse initiale dans le sens  $M_k\Omega$  étant nulle, on écrira simplement que, du fait de l'attraction, le mobile est soumis à une vitesse  $\vec{v}_k$ , orientée vers  $\Omega$ , de module  $v_k = \frac{\mu}{d_k^2}$ . La constante  $\mu$  dépend de la constante universelle de gravitation, de la masse centrale (Soleil ou planète), mais non de la masse du satellite. Pour la Terre, elle vaut approximativement  $\mu = 398\,600.441 \text{ km}^3 / \text{s}^2$ .

La vitesse adoptée par le mobile est alors la somme vectorielle  $\vec{V}_{k+1} = \vec{V}_k + \vec{v}_k$  et la position ultérieure du mobile,  $M_{k+1}$ , est à l'extrémité du vecteur  $\vec{V}_{k+1}$ . Notons  $(x_k, y_k)$  les coordonnées de  $M_k$  et  $(Vx_k, Vy_k)$  les composantes du vecteur  $\vec{V}_k$ . Les composantes du vecteur vitesse centripète  $\vec{v}_k$  sont  $\vec{v}_k = \left( \frac{-\mu x_k}{d_k^3}, \frac{-\mu y_k}{d_k^3} \right)$ , où  $d_k = (x_k^2 + y_k^2)^{\frac{1}{2}}$ . Les composantes du nouveau vecteur vitesse  $\vec{V}_{k+1} = \vec{V}_k + \vec{v}_k$  seront donc :

$$\vec{V}_{k+1} = \left( Vx_k - \frac{\mu x_k}{d_k^3}, Vy_k - \frac{\mu y_k}{d_k^3} \right),$$

et la nouvelle position du mobile sera :

$$M_{k+1} = \left( x_k + Vx_k - \frac{\mu x_k}{d_k^3}, y_k + Vy_k - \frac{\mu y_k}{d_k^3} \right).$$

L'aire du triangle  $\Omega M_k M_{k+1}$  vaut  $\text{aire} = \frac{1}{2} |x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k|$  ; on constate qu'elle est constante.

L'angle  $\mathcal{G}_k$  est défini par  $\tan(\mathcal{G}_k) = \frac{y_k}{x_k}$ .

## V. Pourquoi le Soleil ne peut-il être au centre de l'ellipse ?

Nous avons vu la première loi de Kepler : les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers. Soit, c'est une loi empirique, une constatation que l'on n'a pas à discuter. On peut estimer que c'est scandaleux, que la Nature est mal faite, mais il faut s'en accommoder.

Mais on peut tout de même se poser la question : qu'est-ce qui empêche, par exemple, d'avoir une planète dont la trajectoire serait certes elliptique, mais pour laquelle le Soleil serait au centre de l'ellipse, et non plus un foyer ?

Eh bien là, une fois n'est pas coutume, les mathématiques permettent de répondre à la question : une telle disposition n'est pas possible, sauf si l'orbite est parfaitement circulaire, et la Nature n'est pas si mal faite que cela.

### 1. Le Soleil ne peut pas être ailleurs

Supposons en effet que nous nous donnions notre ellipse en coordonnées polaires :  $x = \rho \cos(\vartheta), y = \rho \sin(\vartheta)$ , où le Soleil est au centre, pris comme origine. Soit  $M(x, y)$  un point courant sur l'ellipse.

Le vecteur vitesse  $\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$  a pour composantes :  $\vec{V} : (\dot{x} = -\rho \sin(\vartheta) \dot{\vartheta}, \dot{y} = \rho \cos(\vartheta) \dot{\vartheta})$ , où  $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$  et de même pour  $\dot{y}, \dot{\vartheta}$ . Le module du vecteur vitesse vérifie :

$$v^2 = (\rho^2 \sin^2(\vartheta) + \rho^2 \cos^2(\vartheta)) \dot{\vartheta}^2 = \rho^2 \dot{\vartheta}^2 \quad (1)$$

Rappelons (voir plus haut) que si le mouvement résulte d'une force centrale, on a l'égalité (loi des aires) :

$$\dot{\vartheta} = \frac{C_{aire}}{\rho^2} \quad (2)$$

où  $C_{aire}$  est une constante. Plus précisément,  $C_{aire} = \sqrt{pv}$ , où  $p = \frac{b^2}{a}$  et  $v = GM_*$  où  $G$  est la constante universelle de gravitation  $G \approx 6,674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ , et  $M_*$  la masse de l'astre d'où résulte l'attraction, ici le Soleil.

Vérifions la cohérence des unités :  $v$  est en  $m^3 kg^{-1} s^{-2} \times kg = m^3 / s^2$ ;  $p = \frac{b^2}{a}$  est en  $m$ , donc  $pv$  est en  $m^4 / s^2$  et  $C_{aire} = \sqrt{pv}$  en  $m^2 / s$ . Donc  $\frac{C_{aire}}{\rho^2}$  est en  $1/s$ ;  $\dot{\vartheta}$  est aussi en  $1/s$ .

Il résulte de (1) et (2) que  $v^2 = \frac{C_{aire}^2}{\rho^2}$ .

Or, le système étant isolé, son énergie mécanique totale doit rester constante. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique, de la forme  $\frac{1}{2}mv^2$ , et de l'énergie potentielle, nécessairement de la forme  $\frac{vm}{\rho}$  puisque l'attraction est en  $\frac{GmM_*}{\rho^2} = \frac{vm}{\rho^2}$ . Il en résulte que la somme  $\frac{C_{aire}^2}{\rho^2} - \frac{vm}{\rho}$  doit rester constante, ce qui requiert  $\rho$  constant : nous sommes en présence d'un cercle.

## 2. Le Soleil est bien là où il doit être

Inversement, voyons pourquoi l'énergie mécanique de la planète reste constante lorsque le Soleil est placé à l'un des foyers de l'ellipse, comme il l'est réellement. Rappelons que, dans le repère centré en un foyer, l'équation intrinsèque de l'ellipse est de la forme :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta)} \quad (1)$$

$$\text{avec } p = \frac{b^2}{a}, \quad e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

L'expression de la vitesse en coordonnées polaires donne :

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + (\rho \dot{\vartheta})^2 \quad (2)$$

Pour un mouvement à force centrale (ce qui est le cas ici, dans ce repère), le vecteur  $\Omega M$  balaye des aires égales en des temps égaux ( $\Omega$  est le foyer,  $M$  le point courant de l'ellipse), voir plus haut. Il en résulte la formule dite "loi des aires", rappelée plus haut :

$$\rho^2 \dot{\vartheta} = C_{aire}, \quad (3)$$

où  $C_{aire}$  est une constante dont la valeur est rappelée plus haut.

On a donc, d'après (2) :

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{C_{aire}^2}{\rho^2}$$

L'énergie mécanique totale est donc :

$$E_{mec} = \frac{1}{2}mv^2 + E_{pot} = \frac{1}{2}m \left( \dot{\rho}^2 + \frac{C_{aire}^2}{\rho^2} \right) - \frac{vm}{\rho}, \quad \text{où } v = GM_* \text{ est une constante, comme expliqué plus haut.}$$

Posons  $u = \frac{1}{\rho}$ ,  $\rho = \frac{1}{u}$ ,  $\dot{\rho} = \frac{-\dot{u}}{u^2} = \frac{-1}{u^2} \frac{du}{d\mathcal{G}}$ ,  $\dot{\mathcal{G}} = -C_{\text{aire}} \frac{du}{d\mathcal{G}}$

$$E_{\text{mec}} = \frac{1}{2} m C_{\text{aire}}^2 \left( \left( \frac{du}{d\mathcal{G}} \right)^2 + u^2 \right) - v m u$$

L'énergie mécanique est constante ; on a donc :

$$\frac{\partial E_{\text{mec}}}{\partial \mathcal{G}} = 0, \text{ d'où, en posant } u' = \frac{\partial u}{\partial \mathcal{G}} :$$

$$\frac{\partial E_{\text{mec}}}{\partial \mathcal{G}} = m C_{\text{aire}}^2 (u' u'' + u u') - v m u' = 0,$$

et, puisque  $u' = \frac{\partial u}{\partial \mathcal{G}}$  n'est pas identiquement nul,

$$u'' + u = \frac{v}{C_{\text{aire}}^2}.$$

Or  $u = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{p} - \frac{e \cos(\mathcal{G})}{p}$ ,  $u' = \frac{e \sin(\mathcal{G})}{p}$ ,  $u'' = \frac{e \cos(\mathcal{G})}{p}$ ,  $u + u'' = \frac{1}{p} = \frac{v}{C^2}$  et la proposition est établie.

## Quatrième Partie

### Détermination d'une ellipse en information limitée

Il peut arriver qu'un corps céleste apparaisse, sur lequel les données de position sont très incomplètes. A partir de quand peut-on reconstituer l'ensemble de la trajectoire ?

#### I. Détermination des paramètres à partir de trois visées, angles et distances

Les lois de Kepler permettent cette reconstitution à partir de trois visées seulement. Par "visée", il faut entendre : détermination de l'angle et de la distance. On sait que la trajectoire sera plane (première loi de Kepler) et on se place dans ce plan. L'angle initial  $\mathcal{G}_0$  n'est pas connu : il fait partie du problème.

##### A. A partir de l'équation intrinsèque

On part de l'équation intrinsèque :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)}$$

et on suppose trois mesures réalisées en des points  $M_1, M_2, M_3$ . Les inconnues sont les paramètres de la trajectoire, à savoir  $p, e, \mathcal{G}_0$ . On a les trois équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{p}{1 - e \cos(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0)} \\ \rho_2 = \frac{p}{1 - e \cos(\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_0)} \\ \rho_3 = \frac{p}{1 - e \cos(\mathcal{G}_3 - \mathcal{G}_0)} \end{array} \right.$$

et par conséquent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = \frac{1 - e \cos(\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_0)}{1 - e \cos(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0)} \\ \rho_2 = \frac{1 - e \cos(\mathcal{G}_3 - \mathcal{G}_0)}{1 - e \cos(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0)} \\ \rho_3 = \frac{1 - e \cos(\mathcal{G}_3 - \mathcal{G}_0)}{1 - e \cos(\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_0)} \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\begin{cases} 1 - e \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) = \frac{\rho_2}{\rho_1} (1 - e \cos(\vartheta_2 - \vartheta_0)) \\ 1 - e \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) = \frac{\rho_3}{\rho_1} (1 - e \cos(\vartheta_3 - \vartheta_0)) \end{cases}$$

La première équation permet de calculer  $e$  :

$$\rho_1 - e\rho_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) = \rho_2 - e\rho_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_0)$$

$$e = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \rho_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_0)}$$

La seconde s'écrit :

$$e(\rho_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \rho_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_0)) = \rho_1 - \rho_3$$

et en reportant la valeur de  $e$ , on obtient une équation en la seule inconnue  $\vartheta_0$  :

$$\frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \rho_2 \cos(\vartheta_2 - \vartheta_0)} (\rho_1 \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \rho_3 \cos(\vartheta_3 - \vartheta_0)) = \rho_1 - \rho_3$$

$$\rho_1(\rho_1 - \rho_2) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \rho_3(\rho_1 - \rho_2) \cos(\vartheta_3 - \vartheta_0) = \rho_1(\rho_1 - \rho_3) \cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) - \rho_2(\rho_1 - \rho_3) \cos(\vartheta_2 - \vartheta_0)$$

On sait que :

$$\cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) = \cos(\vartheta_1) \cos(\vartheta_0) + \sin(\vartheta_1) \sin(\vartheta_0).$$

Il sera commode de noter  $c_1 = \cos(\vartheta_1)$ ,  $s_1 = \sin(\vartheta_1)$ , etc.

On a alors :

$$\cos(\vartheta_1 - \vartheta_0) = c_1 c_0 + s_1 s_0,$$

et donc :

$$\rho_1(\rho_2 - \rho_3)(c_1 c_0 + s_1 s_0) - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)(c_3 c_0 + s_3 s_0) + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)(c_2 c_0 + s_2 s_0) = 0$$

ce qui s'écrit :

$$s_0(\rho_1(\rho_2 - \rho_3)s_1 - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)s_3 + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)s_2) = -c_0(\rho_1(\rho_2 - \rho_3)c_1 - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)c_3 + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)c_2)$$

et donc :

$$\frac{s_0}{c_0} = -\frac{\rho_1(\rho_2 - \rho_3)c_1 - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)c_3 + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)c_2}{\rho_1(\rho_2 - \rho_3)s_1 - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)s_3 + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)s_2}$$

d'où :

$$\tan(\mathcal{G}_0) = -\frac{\rho_1(\rho_2 - \rho_3)c_1 - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)c_3 + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)c_2}{\rho_1(\rho_2 - \rho_3)s_1 - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)s_3 + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)s_2}$$

$$\mathcal{G}_0 = -\arctan \frac{\rho_1(\rho_2 - \rho_3)c_1 - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)c_3 + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)c_2}{\rho_1(\rho_2 - \rho_3)s_1 - \rho_3(\rho_2 - \rho_1)s_3 + \rho_2(\rho_3 - \rho_1)s_2}$$

La valeur de  $\mathcal{G}_0$  nous donne le grand axe de l'ellipse : en faisant  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$  dans l'équation intrinsèque de l'ellipse, le cosinus vaut 1,  $\rho$  est minimal et on se trouve au périhélie de l'ellipse (point le plus proche de  $\Omega$ ). A l'inverse, pour  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 + \pi$ ,  $\rho$  est maximal et on se trouve à l'apogée de l'ellipse (point le plus éloigné de  $\Omega$ ). Le premier foyer se trouve donc nécessairement sur la droite d'équation  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0$  en coordonnées polaires intrinsèques.

Les valeurs de  $e, p$  s'obtiennent en reportant dans les équations ci-dessus :

$$e = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \cos(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0) - \rho_2 \cos(\mathcal{G}_2 - \mathcal{G}_0)}, \quad p = \rho_1 - e\rho_1 \cos(\mathcal{G}_1 - \mathcal{G}_0).$$

Comme  $p = \frac{b^2}{a}$  et  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ , on trouve  $b^2 = ap$ ,  $e = \frac{\sqrt{a^2 - ap}}{a}$ ,  $e^2 = \frac{a^2 - ap}{a^2} = 1 - \frac{p}{a}$ ,

$$\frac{p}{a} = 1 - e^2, \quad a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

En définitive, les deux paramètres de l'ellipse sont donnés par les formules :

$$a = \frac{p}{1 - e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - e^2}}.$$

### B. A partir de la propriété du jardinier

On peut utiliser la propriété du jardinier pour déterminer la position du premier foyer ; le premier foyer vérifie en effet :

$$FM_1 + M_1\Omega = FM_2 + M_2\Omega = FM_3 + M_3\Omega ;$$

d'où les équations :

$$\begin{cases} FM_1 - FM_2 = M_2\Omega - M_1\Omega \\ FM_1 - FM_3 = M_3\Omega - M_1\Omega \end{cases}$$

Les seconds membres sont connus. L'ensemble des points  $F$  tels que  $FM_1 - FM_2 = cste$  est un arc d'hyperbole dont  $M_1, M_2$  sont les foyers. Le point  $F$  se trouve donc à l'intersection de deux arcs d'hyperbole, de foyers respectifs  $M_1, M_2$  et  $M_1, M_3$ . Cette construction est correcte en théorie, difficile à réaliser en pratique.

### C. Par réflexion

Si on connaît les tangentes en  $M_1, M_2$ , on peut utiliser la propriété de réflexion : les vecteurs  $\Omega M_1$  et  $\Omega M_2$  se réfléchissent tous deux en direction de  $F_1$ . Mais ceci exige que les tangentes soient connues avec précision, ce qui est rarement le cas en pratique. Les tangentes sont portées par les vecteurs vitesse, dont les directions sont difficiles à mesurer avec précision.

## II. Détermination de l'orbite, à partir de la connaissance d'une visée et de la vitesse

On suppose ici connues la position du mobile, par ses coordonnées  $(\rho, \vartheta)$  et la vitesse à l'instant initial, en module et en direction. On veut en déduire l'ensemble de la trajectoire.

On se place dans le plan de l'ellipse ; le second foyer est au centre de la Terre. On a détecté le satellite en une position  $M$ , déterminée par ses coordonnées polaires  $\rho, \vartheta$  par rapport à un axe de référence  $\Omega x$  quelconque.

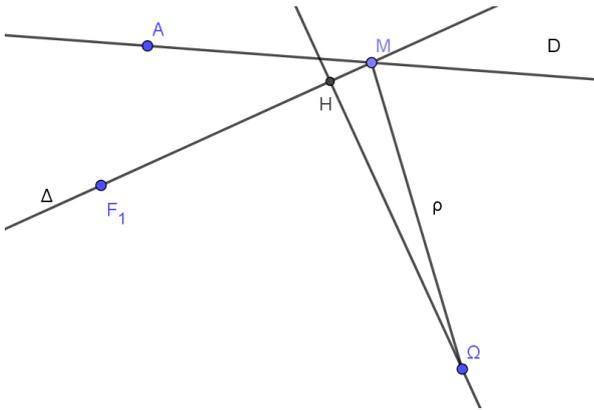
On connaît en outre le vecteur vitesse  $\vec{V}$  du satellite au point  $M$ , en direction et en module. Il en résulte que l'on connaît la constante des aires du satellite, et donc le paramètre  $p$  dans l'équation intrinsèque :

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)}.$$

En effet,  $C^2 = \mu p$  où  $\mu$  est une constante. On rappelle que  $p = \frac{a^2 - c^2}{a}$ .

On note  $\alpha$  l'angle du vecteur  $\overrightarrow{\Omega M}$  avec le vecteur  $\vec{V}$  ; il s'agira d'un angle géométrique, non orienté et au plus égal à  $\frac{\pi}{2}$ .

## 1. Approche géométrique



D'après la propriété de réflexion, le premier foyer, noté  $F_1$ , se trouve sur la droite  $\Delta$  qui fait un angle  $\alpha$  avec  $D$  (voir figure). L'angle  $(M\Omega, M\Delta)$ , noté  $\beta$ , vaut donc  $\beta = \pi - 2\alpha$  et l'on a :

$$HM = \rho |\cos(\pi - 2\alpha)| = \rho |\cos(2\alpha)|$$

$$\Omega H = \rho |\sin(\pi - 2\alpha)| = \rho |\sin(2\alpha)|$$

Le point  $F_1$  se trouve nécessairement du même côté que  $\Omega$  par rapport à la droite  $D$  (tangente au point  $M$ ). Mais le point  $H$  ne se trouve pas nécessairement entre  $M$  et  $F_1$  ; il est entre  $M$  et  $F_1$  si  $\pi - 2\alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  $\alpha > \frac{\pi}{4}$  ; il est au-delà de  $M$  si  $\alpha < \frac{\pi}{4}$ .

Si  $\beta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos(\beta) > 0$ .

Cas 1 :  $\beta < \frac{\pi}{2}$

Alors  $\cos(\beta) > 0$ ,  $H$  est entre  $F_1$  et  $M$ . Dans le triangle rectangle  $F_1H\Omega$ , on a :

$$F_1\Omega^2 = F_1H^2 + H\Omega^2,$$

et donc :

$$4c^2 = (2a - \rho - HM)^2 + \rho^2 \sin^2(2\alpha) = (2a - \rho - \rho \cos(\beta))^2 + \rho^2 \sin^2(\beta),$$

et comme  $c^2 = a^2 - ap$  :

$$4(a^2 - ap) = (2a - \rho(1 + \cos(\beta)))^2 + \rho^2 \sin^2(\beta),$$

$$4a^2 - 4ap = 4a^2 - 4a\rho(1 + \cos(\beta)) + \rho^2(1 + 2\cos(\beta) + \cos^2(\beta)) + \rho^2 \sin^2(\beta),$$

$$a(2\rho(1 + \cos(\beta)) - 4p) = \rho^2(1 + \cos(\beta))$$

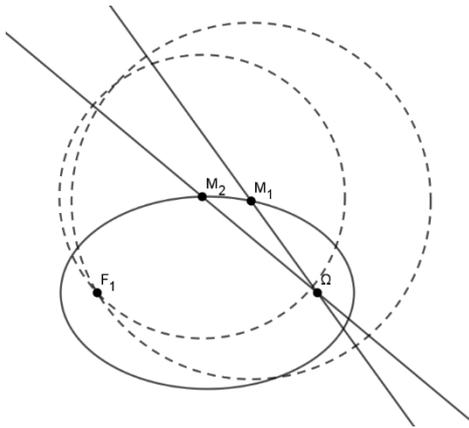
et finalement, avec  $\delta = 1 + \cos(\beta)$  :



$\alpha$ , il en résulte que  $BM\Omega$  vaut  $\pi-2\alpha$ . Comme  $B\Omega M$  vaut  $\pi-\mathcal{G}$ , il en résulte que  $\Omega BM = \pi - (\pi - 2\alpha) - (\pi - \mathcal{G}) = 2\alpha + \mathcal{G} - \pi$  et, si  $M$  a pour coordonnées  $(x_0, y_0)$ , l'équation de la droite  $BM$ , sur laquelle le premier foyer doit se trouver, sera :

$$y - y_0 = \tan(2\alpha + \mathcal{G} - \pi)(x - x_0) = \tan(2\alpha + \mathcal{G})(x - x_0).$$

### 3. Visées multiples



Si on dispose de deux points de visée  $M_1, M_2$ , et que la valeur de  $a$  est connue, on n'a plus besoin d'utiliser le vecteur vitesse : il suffit de considérer l'intersection des deux cercles définis ci-dessus ; voir figure ci-contre.

Si on a préalablement déterminé la direction du grand axe, un seul cercle suffit : on prend l'intersection du cercle avec le grand axe.

## III. Détermination de l'orbite à partir de visées angulaires et du temps qui les sépare

Ici, on suppose que l'on ne dispose pas d'information de distance. Le plan de l'orbite est connu et pris comme plan horizontal. On suppose qu'à des instants  $t_k$  on a des visées définies par des angles  $\varphi_k$  par rapport à l'axe des  $x$ , choisi arbitrairement. Peut-on reconstituer la trajectoire ?

A priori, c'est le problème qu'a résolu Kepler, qui ne disposait que de visées et de temps et d'aucune information de distance. Mais Kepler disposait de données s'étalant sur une longue période, ce qui permettait une triangulation. Ici, nous ne disposons pas de cette possibilité.

A partir du moment où deux visées sont connues avec le temps qui les sépare, le grand axe de l'ellipse est connu : cela résulte de la troisième loi de Kepler. En effet :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mu}{4\pi^2},$$

et le temps total de révolution se déduit par une règle de trois du temps mis à parcourir l'angle entre deux visées.

La trajectoire sera connue dès que la position du premier foyer est connue, puisque le paramètre  $a$  est connu. Notons  $(x, y)$  les coordonnées (inconnues) du premier foyer. Les points  $M_1, M_2$  correspondant à deux visées sont alors connus (le point  $M_1$  est sur l'axe des  $x$ ), donc l'équation de l'ellipse, donc l'aire  $A$  du secteur elliptique  $(\Omega M_1, \Omega M_2)$  ; cette aire est parcourue en un

temps  $t$  connu. On connaît le temps total  $T$  pour une révolution, correspondant à une aire  $\pi ab$ , où  $b$  dépend de  $(x, y)$ . Pour ces deux visées, on écrit l'équation de Kepler :

$$\frac{\pi ab}{T} = \frac{A}{t},$$

qui nous donne donc une première relation entre  $x$  et  $y$ . Comme nous avons deux inconnues, il nous faut deux relations, soit trois visées. La formule donnant l'aire d'un secteur elliptique a été vue plus haut ; elle est complexe et il faudra avoir recours à une procédure numérique.

## Cinquième Partie

### Mouvement de deux corps

Comme nous l'avons dit plus haut, contrairement à ce que pensait Kepler, il est faux que les planètes tournent autour du Soleil et il est faux que la Lune tourne autour de la Terre ; dans les deux cas, la rotation se fait par rapport au barycentre (centre de gravité) des deux corps. Pour le couple (Soleil, Mars) cela fait peu de différence, la masse du Soleil étant considérable devant celle de Mars. Pour le couple (Terre, Lune), cela fait une différence observable : le fait que la rotation se fasse par rapport au barycentre est responsable de l'effet de "doubles marées": l'eau se soulève non seulement au-dessous de la Lune, mais aussi de l'autre côté de la Terre. Voir notre article [https://www.scmsa.eu/archives/BB\\_doubles\\_marees\\_2024\\_01\\_02.pdf](https://www.scmsa.eu/archives/BB_doubles_marees_2024_01_02.pdf).

Intellectuellement, il n'est pas satisfaisant de supposer que le "gros" corps est immobile, tandis que le petit tourne autour : les deux sont soumis aux effets de la gravitation. Heureusement, dans la situation présente, les mathématiques apportent une réponse satisfaisante – moyennant des hypothèses discutables !

Notre présentation suit [https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème\\_à\\_deux\\_corps](https://fr.wikipedia.org/wiki/Problème_à_deux_corps).

Soient donc  $M_1, M_2$  deux corps (assimilés à un point) en interaction gravitationnelle, de masses respectives  $m_1, m_2$ . Soit  $\overrightarrow{F_{1,2}}$  la force exercée par  $M_1$  sur  $M_2$  et  $\overrightarrow{F_{2,1}}$  la force exercée par  $M_2$  sur  $M_1$  ; toutes deux sont portées par l'axe  $M_1M_2$  ; on peut admettre que  $\overrightarrow{F_{1,2}} = -\overrightarrow{F_{2,1}}$ , encore que ce ne soit nullement évident. Dans ces conditions, si on note  $\gamma_1, \gamma_2$  les accélérations respectives des deux points, on aura :

$$\gamma_1 m_1 + \gamma_2 m_2 = 0,$$

ces accélérations étant en sens opposé. Par rapport à un repère quelconque de centre  $O$ , ceci s'écrit :

$$m_1 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_1}}{dt^2} + m_2 \frac{d^2 \overrightarrow{OM_2}}{dt^2} = 0. \quad (1)$$

Si on introduit le centre de masse (centre de gravité) du système  $(M_1, M_2)$ , noté  $\Omega$ , il se situe sur le segment  $M_1M_2$  et vérifie  $m_1 \overrightarrow{\Omega M_1} + m_2 \overrightarrow{\Omega M_2} = 0$ , ou :

$$\overrightarrow{O\Omega} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2} \quad (2)$$

Il résulte alors de (1) et (2) que  $\Omega$  vérifie :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{O\Omega}}{dt^2} = 0,$$

Autrement dit, le point  $\Omega$  est en mouvement rectiligne uniforme et peut être considéré comme fixe. On a :

$$\frac{d^2 \overrightarrow{M_1 M_2}}{dt^2} = \frac{d^2 \overrightarrow{O M_2}}{dt^2} - \frac{d^2 \overrightarrow{O M_1}}{dt^2} = \frac{F_{1,2}}{m_1} - \frac{F_{2,1}}{m_2} = \left( \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \right) F_{1,2}.$$

Donc, dans le référentiel de centre  $\Omega$ , considéré comme fixe, on a une particule  $P$ , dite "fictive", vérifiant  $\overrightarrow{\Omega P} = \overrightarrow{M_1 M_2}$  et, avec  $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  et  $F = F_{1,2}$  :

$F = \mu \gamma$  où  $\gamma$  est l'accélération de la particule fictive, à savoir :

$$\gamma = \frac{d^2 \overrightarrow{\Omega P}}{dt^2}.$$

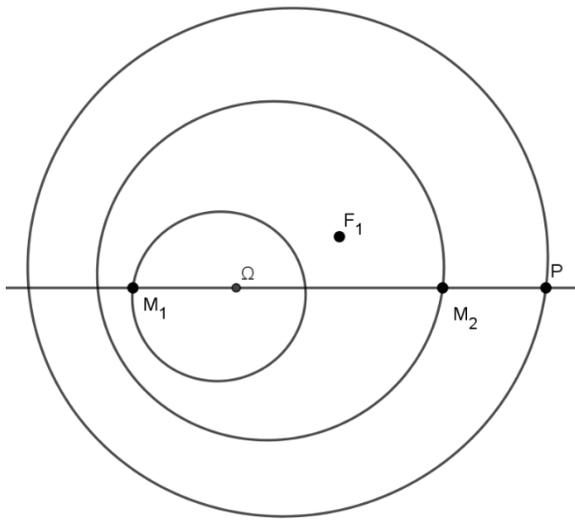
La théorie vue précédemment montre que la particule fictive décrit une ellipse dont  $\Omega$  est l'un des foyers. La force  $F = F_{1,2}$  vérifie en effet  $F = \frac{Gmm'}{d^2}$  avec  $d = \Omega P = M_1 M_2$ ,  $m' = \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ ,  $m = m_1 + m_2$ , masse du système entier.

On a par construction :

$$\overrightarrow{\Omega M_1} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_1 M_2} = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \overrightarrow{\Omega P},$$

$$\overrightarrow{\Omega M_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{M_1 M_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \overrightarrow{\Omega P},$$

et donc, dans le référentiel de centre  $\Omega$ , les trajectoires de  $M_1, M_2$  sont des ellipses qui se déduisent de celle de la particule fictive par des homothéties.



Exemple numérique avec  $m_1 = 2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  
 $\mu = \frac{2}{3} \text{ kg}$ ,  $2\overline{\Omega M_1} + \overline{\Omega M_2} = 0$ , le point  $\Omega$  est sur le  
segment  $M_1 M_2$  au premier tiers en partant de  $M_1$ .  
La particule fictive  $P$  décrit une ellipse dont les foyers sont  $\Omega, F_1$  ( $F_1$  est ici arbitraire) et les mobiles  
 $M_1, M_2$  décrivent des ellipses homothétiques, dans  
des homothéties de centre  $\Omega$  et de rapports respec-  
tifs  $2/3, -1/3$ .

Tout ceci repose évidemment sur la loi de la gravitation universelle,  $F = \frac{Gmm'}{d^2}$ , qui pose un certain nombre de problèmes :

- Rien ne s'oppose à la gravitation : l'effet de la Lune, de l'autre côté de la Terre, est le même que si la Terre n'était pas là ;
- La gravitation se propage de manière instantanée et à toute distance ;
- La formule est certainement fautive si  $d \rightarrow 0$  : en pratique, la force ne devient pas infinie si les deux corps sont proches ;
- La gravitation suppose une dépense d'énergie ; d'où vient-elle ? En effet, la gravitation génère de l'information : soit une planète quelque part dans l'espace ; si je dispose d'une boule de 1 kg, elle sera attirée par cette planète et donc je saurai dans quelle direction est la planète. Si je répète l'expérience en deux endroits distincts non alignés, je saurai où est la planète. Cette information suppose une dépense d'énergie, qui ne peut venir que d'une diminution des deux masses.

## Sixième Partie

### L'ellipse dans l'espace

Selon la première loi de Kepler, les planètes décrivent des orbites planes. Il suffit donc de savoir décrire correctement le plan correspondant.

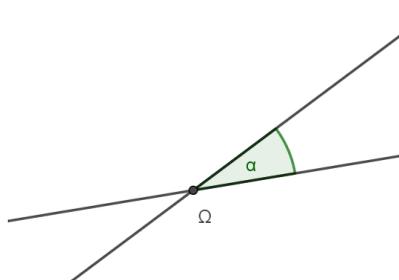
#### 1. Notations

L'ellipse est contenue dans un plan qui passe par le centre de la Terre, noté  $\Omega$ , qui sera pris comme origine des axes. L'axe vertical du repère absolu relie les pôles nord et sud de la Terre. L'axe des  $x$  est fixé par convention et l'axe des  $y$  s'en déduit.

Le plan de l'ellipse peut donc être décrit par deux équations  $z = \alpha x$  et  $z = \beta y$  qui représentent les droites intersections du plan avec les plans verticaux  $x\Omega z$  et  $y\Omega z$ . On peut aussi déterminer le plan par son vecteur normal, qui sera de la forme  $ux + vy + wz = 0$ . Il faut le normaliser, et il y a deux vecteurs après normalisation. Le choix retenu est indiqué plus loin. Nous avons besoin de préciser certaines notations.

#### 2. Angle de deux droites

Etant donné deux droites  $D_1, D_2$  dans l'espace, passant par l'origine, elles définissent un plan unique (sauf si elles sont confondues), qui passe aussi par l'origine.



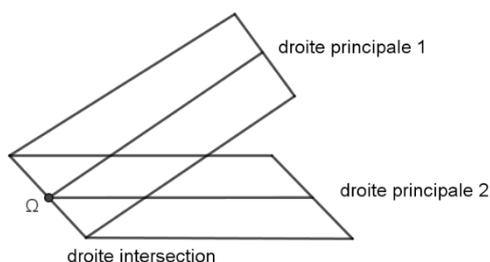
Ces deux droites définissent quatre angles, égaux deux à deux. On retient généralement celui qui est  $\leq \frac{\pi}{2}$  (voir figure). Pour nous, il s'agit d'angles géométriques (non orientés).

Si on se donne deux vecteurs, notés  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ , portés respectivement par les droites  $D_1, D_2$ , on peut calculer l'angle de manière analytique, au moyen d'un produit scalaire :

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2}{\|\vec{V}_1\| \|\vec{V}_2\|},$$

à interpréter en valeur absolue. Ceci requiert d'avoir introduit une base, donc des coordonnées, mais le résultat est indépendant de la base choisie.

### 3. Angle de deux plans passant par l'origine



On peut définir, dans l'espace, l'angle de deux plans  $\Pi_1, \Pi_2$  passant par l'origine. Ces deux plans, sauf s'ils sont confondus (auquel cas leur angle est nul) se coupent selon une droite, qui passe évidemment par l'origine. Elle sera notée  $D_{\text{int}}$ , pour intersection. Il existe dans  $\Pi_1$  une droite unique, perpendiculaire à  $D_{\text{int}}$ , passant par l'origine ; nous la noterons  $D_{\text{principal},1}$  et nous

l'appellerons "droite principale du plan  $\Pi_1$ " et de même  $D_{\text{principal},2}$  dans le plan  $\Pi_2$ . Attention, ces droites principales sont relatives au couple  $\Pi_1, \Pi_2$  : elles n'ont pas de sens individuellement.

L'angle des deux plans sera, par définition, l'angle des deux droites principales, au sens défini au paragraphe précédent. On peut montrer que cet angle est le plus petit possible, obtenu entre une droite de  $\Pi_1$ , passant par l'origine, et une droite de  $\Pi_2$ , passant par l'origine. Formellement :

$$\text{angle}(\Pi_1, \Pi_2) = \inf \{ \text{angles}(D_1, D_2) ; D_1 \subset \Pi_1, \Omega \in D_1, D_2 \subset \Pi_2, \Omega \in D_2 \}.$$

### 4. Vecteur normal à un plan

Un plan passant par l'origine admet un vecteur normal, issu de l'origine ; en coordonnées cartésiennes ce vecteur aura pour composantes  $(u_1, u_2, u_3)$  et l'équation du plan sera  $u_1x + u_2y + u_3z = 0$ . Ceci exige évidemment d'avoir défini un repère avec des coordonnées.

Si on connaît deux vecteurs dans le plan,  $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ , le vecteur normal se définit comme le produit vectoriel de ces deux vecteurs :

$$\vec{N} = \vec{V}_1 \wedge \vec{V}_2,$$

que l'on normalise pour avoir un vecteur de longueur 1. Formellement, il existe deux vecteurs normaux, opposés en direction. Comme nous ne considérons que des angles géométriques, le choix nous est indifférent. S'il s'agit de mécanique orbitale, on choisira le vecteur orienté vers le Nord.

Dans ces conditions, l'angle de deux plans se définit aussi comme l'angle que font leurs vecteurs normaux. Sans faire intervenir les droites principales, on peut ainsi définir l'angle de deux plans, dès que l'on dispose de deux points dans chaque plan.

## 5. Angle d'une droite et d'un plan

Soit un plan  $\Pi$  passant par l'origine et une droite  $D$  passant par l'origine, n'appartenant pas au plan. L'angle de la droite avec le plan est simplement l'angle de la droite avec la projection orthogonale sur le plan. On peut dire aussi :

$$\alpha = \inf \{ \text{angles}(D, D') \},$$

pour toutes les droites  $D'$ , passant par l'origine, contenues dans le plan.

## 6. Caractérisation de l'ellipse

On dispose de trois points de visée, notés  $M_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $M_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $M_3(x_3, y_3, z_3)$ , dont les coordonnées sont connues. A partir de là, on détermine le vecteur normal au plan de l'ellipse : c'est le produit vectoriel  $\overrightarrow{\Omega M_1} \wedge \overrightarrow{\Omega M_2}$  normalisé ; on choisit pour direction celle pour laquelle  $z > 0$ , par convention. Il sera noté  $\overrightarrow{V_{normal}}$ .

**Remarque.** – En principe, ce plan doit contenir le point  $M_3$  ; en pratique ce ne sera pas le cas, et encore moins si on dispose d'un grand nombre de points. Il faudra alors choisir le plan qui passe au plus près de tous les points (minimisation d'une somme de carrés de distances).

Un premier travail à faire est de déterminer dans quel sens le mobile tourne sur son orbite. Le vecteur  $\overrightarrow{V_{normal}}$  est défini comme un produit vectoriel et son orientation est définie par la "règle de la main droite" :  $\overrightarrow{\Omega M_1}$  sur le pouce,  $\overrightarrow{\Omega M_2}$  sur l'index et  $\overrightarrow{V_{normal}}$  sur la main droite. Notons  $v_3$  la troisième composante de  $\overrightarrow{V_{normal}}$  dans le repère absolu.

Pour un observateur situé au pôle nord de la Terre :

- Si  $v_3 > 0$ , le mobile tourne dans le sens trigonométrique ;
- Si  $v_3 < 0$ , le mobile tourne dans le sens opposé ;
- Si  $v_3 = 0$ , le mobile tourne dans un plan contenant l'axe  $\Omega z$  et le sens de la trajectoire n'est pas perceptible par un observateur situé au pôle. Il faut changer de point d'observation, par exemple se mettre sur l'axe  $\Omega x$  ou  $\Omega y$ .

L'équation intrinsèque de l'ellipse, dans le plan de la trajectoire, s'écrit :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)},$$

où  $\vartheta_0$  est l'angle entre le vecteur  $\overrightarrow{\Omega M_1}$  (le point  $M_1$  est pris comme origine des temps, donc des angles) et le vecteur  $\overrightarrow{\Omega E_{GA}}$ , où  $E_{GA}$  est l'une des extrémités du grand axe (qui n'est pas connu à ce stade). On écrit :

$$\vartheta_0 = (\overrightarrow{\Omega M_1}, \overrightarrow{\Omega E_{GA}}).$$

On note respectivement  $a, b$  le demi grand axe et le demi petit axe.

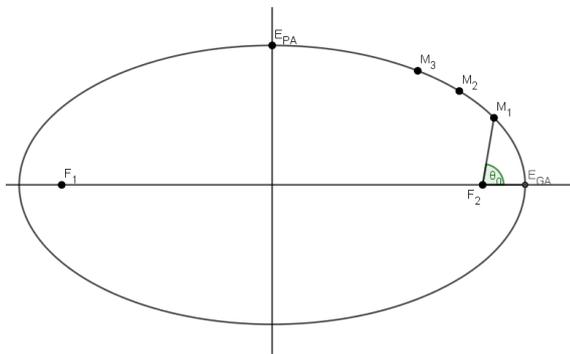
Le paramètre  $e$  est l'excentricité :  $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$  et  $p = \frac{b^2}{a}$ .

Il y a donc trois inconnues :  $a, b, \vartheta_0$  et il faut trois équations, correspondant à trois visées, pour les résoudre.

## 7. Résolution des équations principales

La visée  $M_1$  est prise comme origine des temps et des angles. Donc :

- $\vartheta_1 = 0$  ;
- $\vartheta_2$  est déterminé par le produit scalaire  $\overrightarrow{\Omega M_1} \cdot \overrightarrow{\Omega M_2}$  ;
- $\vartheta_3$  est déterminé par le produit scalaire  $\overrightarrow{\Omega M_1} \cdot \overrightarrow{\Omega M_3}$ .



On pose  $\cos(\vartheta_0) = x$ ,  $\sin(\vartheta_0) = y$  d'où les équations :

$$\begin{cases} \cos(\vartheta_1)ex - e \sin(\vartheta_1)ey = \frac{p}{r_1} - 1 \\ \cos(\vartheta_2)ex - \sin(\vartheta_2)ey = \frac{p}{r_2} - 1 \\ \cos(\vartheta_3)ex - \sin(\vartheta_3)ey = \frac{p}{r_3} - 1 \end{cases}$$

qui s'écrivent, en posant  $\alpha = \frac{p}{r_1} - 1$ ,  $\beta = \frac{p}{r_2} - 1$ ,  $\gamma = \frac{p}{r_3} - 1$  :

$$\begin{cases} ex = \alpha \\ \cos(\vartheta_2)ex - \sin(\vartheta_2)ey = \beta \\ \cos(\vartheta_3)ex - \sin(\vartheta_3)ey = \gamma \end{cases}$$

Les deux premières équations nous donnent  $ex, ey$  en fonction de  $p$ .

$$\begin{cases} ex = \alpha \\ ey = \frac{\alpha \cos(\vartheta_2) - \beta}{\sin(\vartheta_2)} \end{cases}$$

En reportant dans la troisième équation et en multipliant par  $\sin(\vartheta_2)$ , on obtient :

$$\alpha \cos(\vartheta_3)\sin(\vartheta_2) - \alpha \cos(\vartheta_2)\sin(\vartheta_3) + \beta \sin(\vartheta_3) = \gamma \sin(\vartheta_2)$$

on sait que :

$$\cos(\vartheta_3)\sin(\vartheta_2) - \cos(\vartheta_2)\sin(\vartheta_3) = \sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)$$

et donc :

$$p = \frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3) + \sin(\vartheta_3) - \sin(\vartheta_2)}{\frac{\sin(\vartheta_2 - \vartheta_3)}{r_1} + \frac{\sin(\vartheta_3)}{r_2} - \frac{\sin(\vartheta_2)}{r_3}}$$

On en déduit les produits  $ex, ey$  par les formules précédentes et  $e$  puisque  $x^2 + y^2 = 1$ .

## 8. Retour sur l'équation en coordonnées polaires

On l'écrit sous la forme  $r = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)}$ . Le rayon est minimal si le cosinus vaut 1, soit

$\vartheta = \vartheta_0$  ; on a alors  $\frac{p}{1 - e} = a - c$  (distance entre l'extrémité du grand axe et le foyer).

Le rayon est maximal si le cosinus vaut -1, soit  $\vartheta = \pi + \vartheta_0$  ; on a alors  $\frac{p}{1 + e} = a + c$ .

Il en résulte que  $\frac{1+e}{1-e} = \frac{a-c}{a+c}$ , d'où  $e = -\frac{c}{a}$  et  $p = \frac{(a-c)(a+c)}{a} = \frac{b^2}{a}$ , avec  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$

On peut écrire l'équation sous la forme :

$$r = \frac{b^2}{a - c \cos(\vartheta - \vartheta_0)}, \text{ avec } c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

## 9. Tracé d'une ellipse en 3d

On veut réaliser le tracé d'une ellipse en 3d, à partir de trois points  $M_1, M_2, M_3$ , de coordonnées respectives  $(x_1, y_1, z_1), etc.$  dans le repère de référence, centré en  $\Omega$ .

On commence par déterminer le plan de l'ellipse, puis les valeurs de  $a, b$ , comme expliqué ci-dessus.

Le vecteur directeur du grand axe, noté  $\overrightarrow{V_{GA}}$ , est défini par les propriétés suivantes :

1. Il est contenu dans le plan de l'ellipse, donc perpendiculaire au vecteur  $\overrightarrow{V_{normal}}$  :

$$\overrightarrow{V_{normal}} \cdot \overrightarrow{V_{GA}} = 0.$$

2. Il fait un angle  $\vartheta_0$  avec la direction initiale  $\Omega M_1$  :

$$\frac{\overrightarrow{V_{GA}} \cdot \overrightarrow{\Omega M_1}}{\|\overrightarrow{V_{GA}}\| \|\overrightarrow{\Omega M_1}\|} = \cos(\vartheta_0)$$

Attention : si le mobile se déplace dans le sens trigonométrique, le grand axe est avant  $\Omega M_1$ .

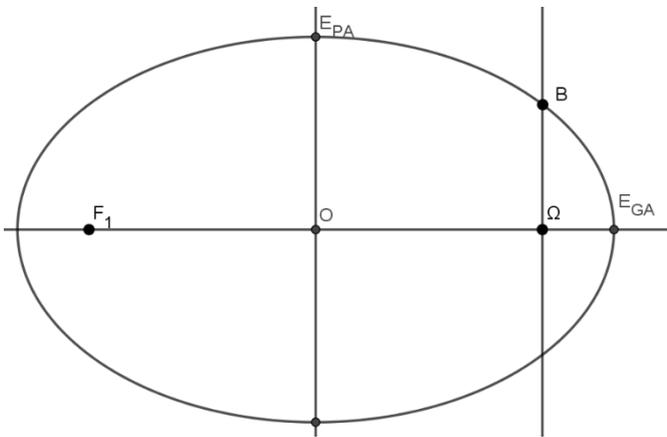
3. Il est de norme 1.

Il y a deux possibilités opposées pour  $\overrightarrow{V_{GA}}$ . On détermine ensuite les extrémités du grand axe,  $E_{GA}$  : le vecteur  $\overrightarrow{\Omega E_{GA}}$  est porté par  $\overrightarrow{V_{GA}}$  et est de longueur  $a - c$ .

On détermine ensuite le centre de l'ellipse, noté  $O$  : milieu des extrémités du grand axe. On vérifie que le vecteur  $\overrightarrow{\Omega O}$  est colinéaire à  $\overrightarrow{V_{GA}}$ .

On détermine ensuite le vecteur directeur du petit axe, noté  $\overrightarrow{V_{PA}}$ , d'origine  $O$ , par le fait qu'il est orthogonal à  $\overrightarrow{V_{normal}}$  et  $\overrightarrow{V_{GA}}$  et est de norme 1. Les extrémités du petit axe sont sur  $\overrightarrow{V_{PA}}$ , à distance  $b$  de  $O$ . On vérifie que le milieu des extrémités du petit axe est bien le centre de l'ellipse.

On note  $E_{PA}$  les extrémités du petit axe. Les vecteurs  $\overrightarrow{OE_{PA}}$  et  $\overrightarrow{OE_{GA}}$  sont orthogonaux, mais pas les vecteurs  $\overrightarrow{\Omega E_{PA}}$  et  $\overrightarrow{\Omega E_{GA}}$ .



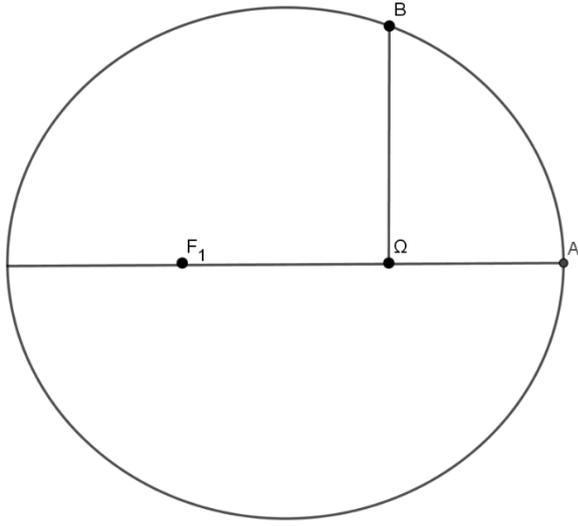
Nous notons  $B$  le point tel que les vecteurs  $\overrightarrow{\Omega B}$  et  $\overrightarrow{\Omega E_{GA}}$  soient orthogonaux (voir figure). Puisque le grand axe, dans l'équation intrinsèque, est obtenu pour  $\vartheta = \vartheta_0$ , le point  $B$  est obtenu pour  $\vartheta = \vartheta_0 + \frac{\pi}{2}$ . On a alors  $r = p$ .

## 10. Passage des coordonnées polaires intrinsèques à l'ellipse aux coordonnées cartésiennes absolues

Soit  $M$  un point quelconque de l'ellipse, de coordonnées  $(r, \vartheta)$  dans le repère lié à l'ellipse (axe de référence = grand axe de l'ellipse). On a donc :

$$r = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)}$$

comme expliqué ci-dessus.



Pour simplifier l'écriture, nous notons  $A$  au lieu de  $E_{GA}$ . Le point  $B$  est défini par le fait qu'il est sur l'ellipse et que  $\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B}$  sont orthogonaux. Attention :  $\Omega B$  n'est pas le petit axe, car  $\Omega$  n'est pas le centre de l'ellipse.

On normalise les vecteurs  $\overline{\Omega A}$  et  $\overline{\Omega B}$  de manière à obtenir un repère orthogonal, dans lequel on écrit la décomposition de  $\overline{\Omega M}$  :

$$\overline{\Omega M} = \alpha \frac{\overline{\Omega A}}{\|\overline{\Omega A}\|} + \beta \frac{\overline{\Omega B}}{\|\overline{\Omega B}\|},$$

avec  $\alpha = r \cos(\vartheta - \vartheta_0), \beta = r \sin(\vartheta - \vartheta_0)$ .

On note  $(a_1, a_2, a_3)$  les coordonnées de l'extrémité de  $\frac{\overline{\Omega A}}{\|\overline{\Omega A}\|}$  dans le repère lié à la Terre et

$(b_1, b_2, b_3)$  celles de l'extrémité de  $\frac{\overline{\Omega B}}{\|\overline{\Omega B}\|}$ .

On note  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  les vecteurs unité des trois axes du repère lié à la Terre. On a donc :

$$\overline{\Omega M} = r \cos(\vartheta - \vartheta_0)(a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) + r \sin(\vartheta - \vartheta_0)(b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}).$$

Dans le repère lié à la Terre, les coordonnées de  $M$  sont donc :

$$M = \begin{cases} a_1 r \cos(\vartheta - \vartheta_0) + b_1 r \sin(\vartheta - \vartheta_0) \\ a_2 r \cos(\vartheta - \vartheta_0) + b_2 r \sin(\vartheta - \vartheta_0) \\ a_3 r \cos(\vartheta - \vartheta_0) + b_3 r \sin(\vartheta - \vartheta_0) \end{cases}$$

et puisque  $r = \frac{p}{1 - e \cos(\vartheta - \vartheta_0)}$  :

$$M = \begin{cases} \frac{a_1 p \cos(\vartheta - \vartheta_0) + b_1 p \sin(\vartheta - \vartheta_0)}{1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0)} \\ \frac{a_2 p \cos(\vartheta - \vartheta_0) + b_2 p \sin(\vartheta - \vartheta_0)}{1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0)} \\ \frac{a_3 p \cos(\vartheta - \vartheta_0) + b_3 p \sin(\vartheta - \vartheta_0)}{1 + e \cos(\vartheta - \vartheta_0)} \end{cases}$$

En posant  $\tau = \vartheta - \vartheta_0$ , on obtient une représentation paramétrique simple de la trajectoire :

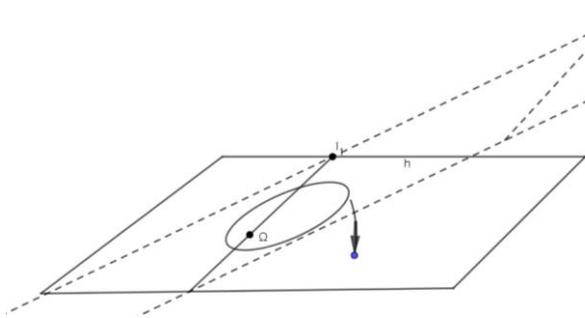
$$M = \begin{cases} x = \frac{a_1 p \cos(\tau) + b_1 p \sin(\tau)}{1 + e \cos(\tau)} \\ y = \frac{a_2 p \cos(\tau) + b_2 p \sin(\tau)}{1 + e \cos(\tau)} \\ z = \frac{a_3 p \cos(\tau) + b_3 p \sin(\tau)}{1 + e \cos(\tau)} \end{cases}$$

### 11. Passage de 3d à 2d

Il peut être tentant, lorsqu'on dispose d'une ellipse dans un plan quelconque, de vouloir en déduire une ellipse dans le plan horizontal.

La projection orthogonale d'une ellipse est une ellipse, mais cette projection ne conserve pas les foyers. Que l'on pense à un cylindre, que l'on coupe par des plans de plus en plus inclinés : les projections sont toujours le cercle de base, mais les foyers des intersections sont de plus en plus éloignés à mesure que l'inclinaison augmente.

La transformation la plus efficace consiste à "rabattre" le plan de l'ellipse. On suppose que l'ellipse a  $\Omega$ , centre de la Terre, pour foyer. Le plan de l'ellipse et le plan horizontal se coupent donc selon une droite  $\Delta$ , dont l'équation est du type  $y = mx$  puisqu'elle passe par l'origine. On considère la transformation "rabattre", consistant en une rotation autour de  $\Delta$ , ramenant le plan de l'ellipse sur le plan horizontal. Une telle rotation est évidemment une isométrie, elle transforme la première ellipse en une ellipse identique (même équation intrinsèque) située dans le plan horizontal. Il est facile de déterminer les points d'intersection de l'ellipse initiale avec l'ellipse rabattue.



En effet, c'est selon la droite  $\Delta$ . Soit  $E_1$  l'ellipse initiale, dans le plan oblique et  $E_2$  l'ellipse rabattue dans le plan horizontal.

Soient  $I_1, I_2$  les intersections de  $E_2$  avec la droite  $\Delta$ .

$E_2$  a la même équation intrinsèque que  $E_1$ ,

où tous les paramètres sont connus. La droite  $\Delta$  a pour équation  $y = mx = \tan(\alpha)x$ . Les coordonnées polaires des points  $I_1, I_2$  sont donc :

$$\left( r = \frac{p}{1 - e_1 \cos(\alpha - \vartheta_0)}, \alpha \right), \left( r = \frac{p}{1 - e \cos(\alpha + \pi - \vartheta_0)}, \alpha + \pi \right)$$

# Table des matières

Première Partie .....	2
Définitions et propriétés géométriques.....	2
1. La définition antique .....	2
2. Définition du jardinier .....	2
3. Equation cartésienne .....	2
4. Equation intrinsèque .....	3
5. Equation en coordonnées polaires .....	4
6. Tangente à l'ellipse .....	5
7. Propriété de focalisation .....	6
8. Périmètre de l'ellipse.....	6
9. Transformations géométriques préservant le périmètre .....	8
10. Aire d'un secteur elliptique.....	8
- En coordonnées cartésiennes .....	8
- En coordonnées polaires .....	10
Seconde Partie .....	12
L'ellipse et les orbites des planètes.....	12
I. Première Loi de Kepler .....	12
II. Détermination de la trajectoire de la planète .....	14
III. Une erreur de Richard Feynman.....	14
IV. Comment procéder ? .....	15
Troisième Partie .....	17
Le mouvement d'un satellite .....	17
I. Seconde Loi de Kepler .....	17
1. Approche générale.....	17
2. En coordonnées polaires .....	19
3. Mouvement angulaire.....	20
II. Suivi dynamique d'un satellite .....	20
A. Présentation du besoin .....	20
B. Présentation de la méthode .....	21
III. Troisième Loi de Kepler.....	23
IV. Construction discrétisée d'une ellipse .....	24
V. Pourquoi le Soleil ne peut-il être au centre de l'ellipse ? .....	25
1. Le Soleil ne peut pas être ailleurs .....	25
2. Le Soleil est bien là où il doit être .....	26
Quatrième Partie.....	28
Détermination d'une ellipse en information limitée.....	28
I. Détermination des paramètres à partir de trois visées, angles et distances .....	28
A. A partir de l'équation intrinsèque .....	28
B. A partir de la propriété du jardinier.....	30

C.	Par réflexion.....	31
II.	Détermination de l'orbite, à partir de la connaissance d'une visée et de la vitesse .....	31
1.	Approche géométrique .....	32
2.	Equation de la droite portant le premier foyer .....	33
3.	Visées multiples .....	34
III.	Détermination de l'orbite à partir de visées angulaires et du temps qui les sépare .....	34
	Cinquième Partie.....	36
	Mouvement de deux corps .....	36
	Sixième Partie .....	39
	L'ellipse dans l'espace.....	39
1.	Notations .....	39
2.	Angle de deux droites.....	39
3.	Angle de deux plans passant par l'origine.....	40
4.	Vecteur normal à un plan .....	40
5.	Angle d'une droite et d'un plan.....	41
6.	Caractérisation de l'ellipse .....	41
7.	Résolution des équations principales .....	42
8.	Retour sur l'équation en coordonnées polaires.....	43
9.	Tracé d'une ellipse en 3d.....	43
10.	Passage des coordonnées polaires intrinsèques à l'ellipse aux coordonnées cartésiennes absolues .....	44
11.	Passage de 3d à 2d .....	46