# L'ellipse et ses mystères

par Bernard Beauzamy

Newsletter SCM : les mathématiques du réel, décembre 2024

Chacun de nous sait ce qu'est une ellipse : elle se rencontre au quotidien, sous la forme de la nappe que l'on met sur une table et du massif que trace le jardinier ; la Nature l'utilise de manière fondamentale, puisque les orbites des planètes sont elliptiques. L'apparence est harmonieuse et les propriétés semblent connues depuis l'antiquité.

En fait, l'ellipse se trouve au centre des trois caractéristiques de nos sociétés modernes, qui sont l'insuffisance, l'incompétence et l'arrogance, comme nous allons le voir. Baudelaire le dit bien [1]:

*L'Humanité bavarde, ivre de son génie,*
*Et, folle maintenant comme elle était jadis…*

L'ellipse enchantera l'enfant curieux :

*Pour l'enfant, amoureux de cartes et d'estampes,*
*L'univers est égal à son vaste appétit.[…]*

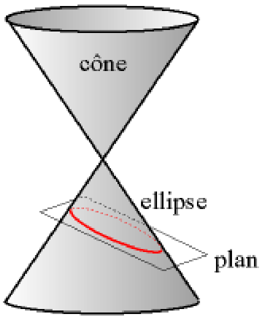
*Nous voulons, tant ce feu nous brûle le cerveau,*
*Plonger au fond du gouffre, Enfer ou Ciel, qu'importe?*
*Au fond de l'Inconnu pour trouver du nouveau!*

Il ne sera pas nécessaire de plonger bien loin ; l'ellipse est là, qui nous tend les bras ! Mais prenons les choses à leur début : qu'est-ce qu'une ellipse ?

[1] *Charles Baudelaire : Les Fleurs du Mal : le Voyage*

# I. Définitions et propriétés géométriques

## 1. La définition antique

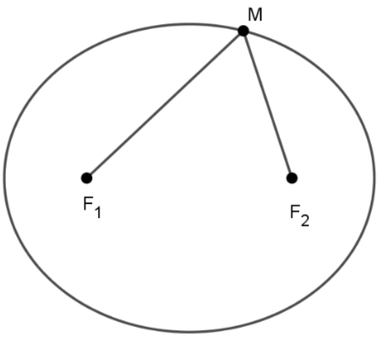



Pour les Anciens, en particulier les Grecs, l'ellipse est obtenue par intersection d'un cône et d'un plan : voir image ci-contre, issue de Wikipedia "ellipse" : https://fr.wikipedia.org/wiki/Ellipse_(mathématiques)

Selon l'angle du plan avec l'axe du cône, on obtient un cercle, une ellipse ou une hyperbole (le cas limite étant celui où le plan est parallèle à une génératrice du cône).

Au 21ème siècle, nous avons complètement perdu cette faculté de visualisation ; l'apparition des coordonnées, puis de l'informatique, a rendu nécessaires d'autres définitions.

## 2. Définition du jardinier




La plus ancienne est la "définition du jardinier" : on se donne deux points, $F_1, F_2$ appelés foyers, et une ficelle de longueur $2a$, accrochée aux deux points en ses extrémités, et on tourne autour des foyers ; formellement, cela s'écrit :

$MF_1 + MF_2 = 2a$.

## 3. Equation cartésienne

La plus répandue, y compris dans l'enseignement, est la définition sous forme d'équation cartésienne ; l'ellipse est l'ensemble des points dont les coordonnées $(x, y)$ sont liées par la relation :

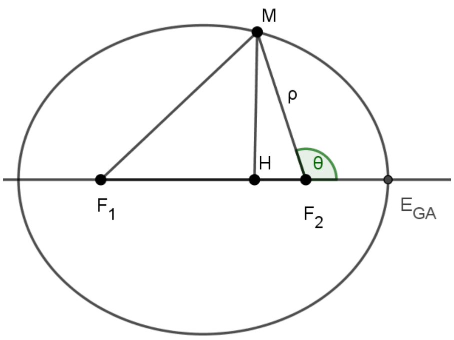
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Cette définition a le mérite de bien faire apparaître les deux paramètres $a$ et $b$ ; elle a le défaut de ne pas faire apparaître les foyers, contrairement à la définition du jardinier. En fait, nous verrons que l'équation cartésienne est peu utilisable en pratique. Elle requiert un système de coordonnées, nécessairement artificiel.

### 4. Equation intrinsèque

On peut donner une représentation qui ne dépend pas d'un système de coordonnées ; c'est pourquoi nous l'appelons "équation intrinsèque".

Soient $F_1, F_2$ deux points quelconques du plan, soit $M$ un point quelconque de l'ellipse et $H$ sa projection orthogonale sur la droite $F_1F_2$. On a, si $F_2M = \rho$ :




$$F_2H = \rho\left|\cos\left(\pi-\vartheta\right)\right| = \rho\left|\cos\left(\vartheta\right)\right|$$

$$MH = \rho\left|\sin\left(\pi-\vartheta\right)\right| = \rho\left|\sin\left(\vartheta\right)\right|.$$

Si l'on pose, selon les notations usuelles, $F_1F_2 = 2c,$ on a, dans le triangle $F_1HM$ :

$$F_1H = F_1F_2 + F_2H = 2c - \rho\cos\left(\vartheta\right)$$

et donc :

$$F_1M^2 = F_1H^2 + MH^2 = \left(2c-\rho\cos\left(\vartheta\right)\right)^2 + \left(\rho\sin\left(\vartheta\right)\right)^2$$

Puisque, par définition de l'ellipse, $MF_1 + MF_2 = 2a,$ et puisque $F_1M = 2a-\rho,$ il vient :

$$\left(2a-\rho\right)^2 = \left(2c-\rho\cos\left(\vartheta\right)\right)^2 + \left(\rho\sin\left(\vartheta\right)\right)^2$$

et après simplification :

$$a^2 - a\rho - c^2 + c\rho\cos(\vartheta) = 0$$

ce qui donne :

$$\rho = \frac{a^2-c^2}{a-c\cos\left(\vartheta\right)}$$

On écrit habituellement cette formule sous la forme :

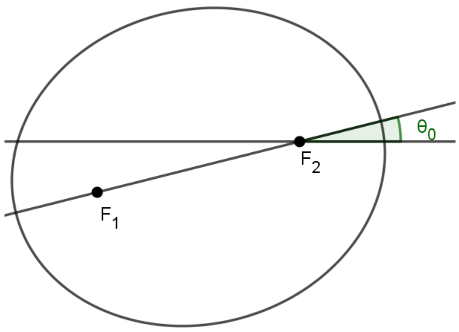
$$\rho = \frac{p}{1-e\cos\left(\vartheta\right)} \quad (1)$$

avec $p = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$, si $b$ est le demi-petit axe de l'ellipse, et $c^2 = a^2 - b^2$. La quantité $e = \frac{c}{a}$ s'appelle l'excentricité (nombre sans dimension). Elle est nulle dans le cas d'un cercle.

La forme (1) s'appelle "équation intrinsèque" de l'ellipse : elle est "intrinsèque" en ce sens qu'elle ne fait appel à aucun référentiel. L'angle $\vartheta$ est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{F_1F_2}$ et $\overrightarrow{F_2M}$.

Il résulte immédiatement de la formule (1) que le $\rho$ minimal est obtenu pour $\vartheta = 0$, $\cos(\vartheta) = 1$, $\rho_{\min} = \frac{p}{1-e}$. Le $\rho$ maximal est obtenu pour $\vartheta = \pi$, $\cos(\vartheta) = -1$, $\rho_{\max} = \frac{p}{1+e}$.

Le centre du repère est ici un foyer de l'ellipse, ce qui correspond à la situation du mouvement des planètes : voir plus bas.




Si l'axe de référence n'est pas la droite joignant les foyers, mais un axe quelconque, l'équation sera mise sous la forme :

$$\rho = \frac{p}{1 - e\cos(\vartheta - \vartheta_0)}.$$

Le minimum de $\rho$ sera obtenu pour $\vartheta = \vartheta_0$, ce qui donne l'orientation de l'axe joignant les foyers.

## 5. Equation en coordonnées polaires

Si on part de l'équation cartésienne vue plus haut et que l'on pose $x = \rho\cos(\vartheta)$, $y = \rho\sin(\vartheta)$, on obtient l'équation :

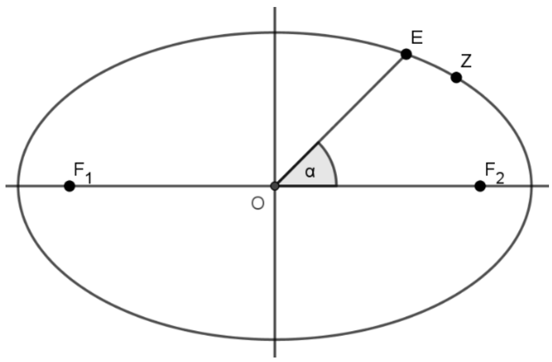
$$\rho = \frac{ab}{\sqrt{a^2\sin^2(\vartheta) + b^2\cos^2(\vartheta)}}. (1)$$

Ici, le centre du repère est le centre de l'ellipse, qui n'a pas de réalité physique dans le mouvement des planètes (voir plus bas). Cette représentation de l'ellipse n'est donc pas recommandée.

On peut aussi écrire l'équation sous forme paramétrique, dans un repère lié au centre de l'ellipse :

$$x = a\cos(\vartheta),\ y = b\sin(\vartheta)$$

auquel cas : $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{a^2\cos^2(\vartheta) + b^2\sin^2(\vartheta)}$ (2)

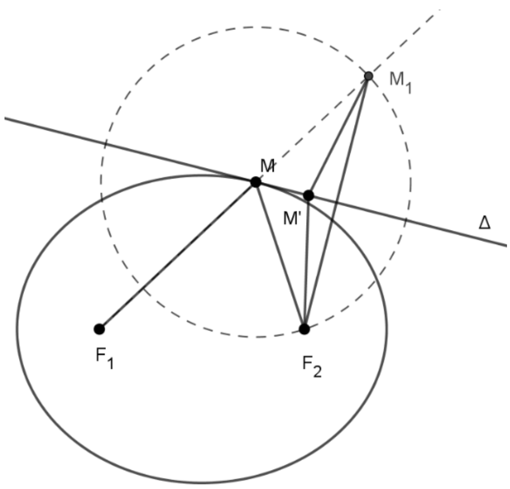



Il faut bien voir que le $\rho$, le $\vartheta$ et les points $(x, y)$ ne sont pas les mêmes selon que l'on choisit la représentation (1) ou (2). Dans l'ellipse ci-contre, nous avons $a = 5, b = 3$ ; le point de coordonnée polaire $\vartheta = \pi / 4$ est le point $E$. Le point noté $Z$ a pour coordonnées paramétriques

$$\left(a\cos\frac{\pi}{4}, b\sin\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) \approx (3.54, 2.12)$$

## 6. Tangente à l'ellipse

Cette construction, purement géométrique, était connue des anciens Grecs. Elle ne requiert aucun système de coordonnées.



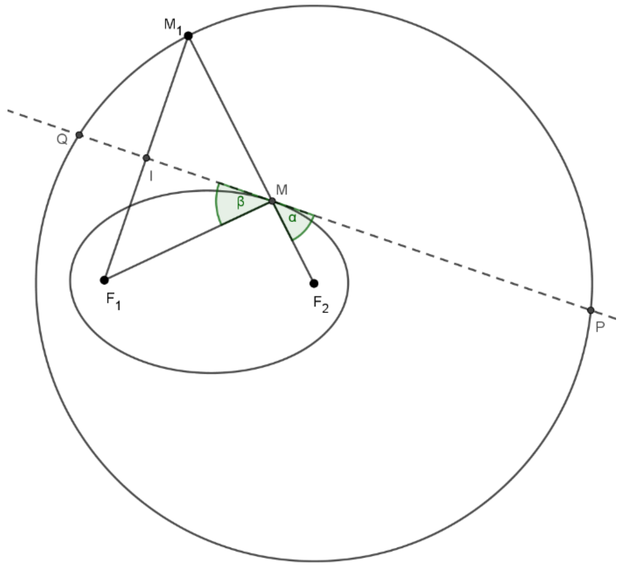

Soit $M$ un point quelconque de l'ellipse et $M_1$, dans le prolongement de $F_1M$, tel que $F_2M = MM_1$ ($M_1$ est donc sur le cercle de centre $M$, passant par $F_2$). La médiatrice $\Delta$ du segment $F_2M_1$ passe évidemment par le point $M$. Nous allons voir qu'elle ne contient aucun autre point de l'ellipse ; elle est donc tangente à l'ellipse au point $M$.

Soit $M'$ un autre point de la droite $\Delta$. On a :

$$F_1M' + M'F_2 = F_1M' + M'M_1 > F_1M + MM_1 = 2a.$$

Par conséquent, le point $M'$ est extérieur à l'ellipse, ce qui prouve notre assertion.

## 7. Propriété de focalisation




**Proposition.** - *Tout rayon lumineux, issu de l'un des foyers, est renvoyé par l'ellipse vers l'autre foyer.*

**Démonstration.** - Soit $M$ un point quelconque de l'ellipse, $PQ$ la tangente à l'ellipse au point $M$. On va montrer que les angles $\alpha = F_2MP$ et $\beta = F_1MQ$ sont égaux ; en d'autres termes, un rayon lumineux issu du foyer $F_2$, touchant l'ellipse en $M$, est renvoyé vers le foyer $F_1$ (et inversement, bien sûr).

Pour cela, nous traçons le cercle de centre $F_2$ et de rayon $2a$. Soit $M_1$ l'intersection de la droite $F_2M$ avec le cercle. On a $M_1M = 2a - F_2M$ et donc $MM_1 = MF_1$.

Nous traçons les segments $F_1M$, $F_2M$, puis la médiatrice du segment $F_1M$. Elle coupe ce segment en $I$ et le segment $F_2M_1$ en $M$, d'après la propriété précédente. On a $MF_1 = MM_1$ et donc $MF_1 + MF_2 = 2a$, quelle que soit la position de $M$ sur le cercle. Le point $M$ est sur l'ellipse et tout autre point $M'$ de la médiatrice vérifiera $M'F_1 + M'F_2 > 2a$, et sera extérieur à l'ellipse. Donc cette médiatrice est bien tangente à l'ellipse au point $M$.

Par ailleurs, l'angle $F_2MP$ est égal à l'angle $QMM_1$, lui-même égal à $QMF_1$, donc $QMF_1 = F_2MP$ et la proposition est démontrée.

## 8. Périmètre de l'ellipse

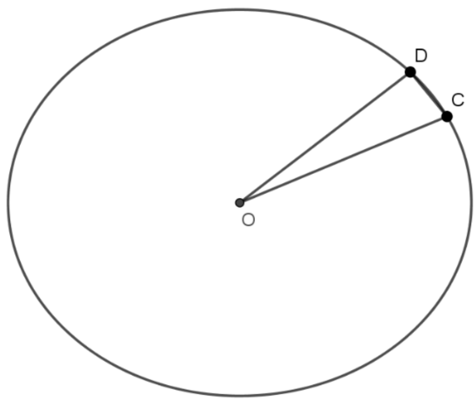
On cherche à calculer le périmètre d'une ellipse, d'axes $a, b$.

**Proposition.** – *Le périmètre de l'ellipse est donné par la formule :*

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}\, dt.$$

**Démonstration.** – On se donne l'ellipse sous forme paramétrique :

$$x = a\cos(t), y = b\sin(t).$$




On découpe l'ellipse au moyen de petits angles au centre de taille $\frac{2\pi}{N}$. Le morceau de l'ellipse est assimilé à un petit segment, ici $CD$ sur la figure. La longueur de ce petit segment est $\sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2}$ ; ici :

$$l_k = \sqrt{a^2\left(\cos\left(\frac{(k+1)2\pi}{N}\right) - \cos\left(\frac{k2\pi}{N}\right)\right)^2 + b^2\left(\sin\left(\frac{(k+1)2\pi}{N}\right) - \sin\left(\frac{k2\pi}{N}\right)\right)^2}$$

et lorsque $N \to +\infty$, la somme $\sum_{k=1}^{N} l_k$ tend vers $L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2(t) + b^2 \cos^2(t)}\, dt$ comme annoncé.

Une remarque intéressante est que le périmètre de l'ellipse n'est pas le périmètre d'un cercle ayant pour rayon le rayon moyen de l'ellipse.

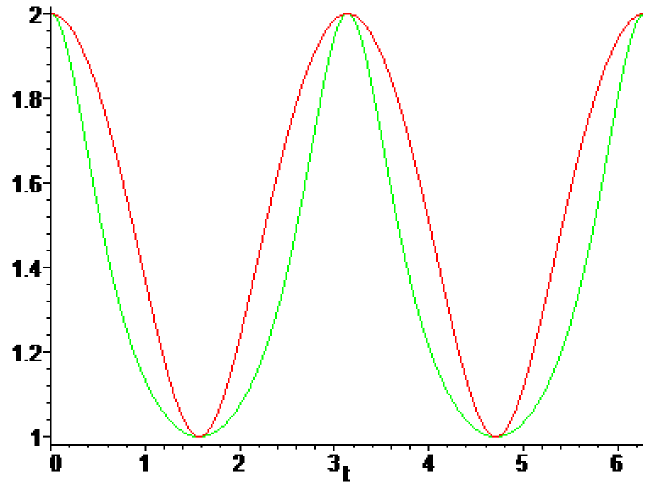
Le rayon de l'ellipse correspondant à un angle $\vartheta$ est $\rho = \dfrac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\vartheta) + a^2 \sin^2(\vartheta)}}$.

Le rayon moyen est donc :

$$\rho_{moyen} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\vartheta) + a^2 \sin^2(\vartheta)}}\, d\vartheta,$$

et le périmètre du cercle ayant ce rayon moyen sera :

$$périmètre\_cercle = \int_0^{2\pi} \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2(\vartheta) + a^2 \sin^2(\vartheta)}}\, d\vartheta.$$




Les deux fonctions à intégrer ne coïncident pas ; voici les graphes.

Il n'existe pas de formule explicite donnant le périmètre de l'ellipse. L'intégrale ci-dessus s'appelle "intégrale elliptique", pour des raisons évidentes.

### 9. Transformations géométriques préservant le périmètre

La Nature réalise une transformation très simple, d'une ellipse en cercle, préservant le périmètre. Il s'agit simplement de "gonfler" l'ellipse. Imaginons que le contour soit réalisé à l'aide d'un câble inextensible, mais déformable (une chaîne de moto). Prenons une ellipse quelconque et soufflons à l'intérieur : l'ellipse va se déformer et la position limite sera celle pour laquelle la pression est partout la même ; ce sera donc un cercle.

On ne sait pas décrire précisément une transformation mathématique ayant cette propriété.

### 10. Aire d'un secteur elliptique

Lorsque nous verrons les lois de Kepler, plus bas, il sera utile d'avoir une formule explicite pour calculer l'aire d'un secteur elliptique. Deux approches sont possibles : en coordonnées cartésiennes et en coordonnées polaires.

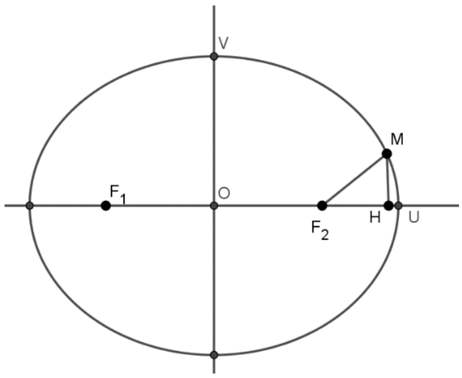
- **En coordonnées cartésiennes**

On se donne l'ellipse par ses coordonnées cartésiennes :

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, d'où $y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$ pour la partie supérieure. Il existe une primitive explicite pour cette fonction :

$$F(x)=\frac{b}{2}\left(x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)+C.$$

On a $C=0$, puisque pour $x=0$, $F(0)=0$ ; si $x=a$, $F(a)=\frac{\pi ab}{4}$ : aire du quart de l'ellipse. On en déduit que l'aire de l'ellipse tout entière est $\pi ab$.




Pour chaque position du point $M$ d'abscisse $x$, on connaît l'aire du secteur elliptique $MHU$ (secteur à droite de la verticale passant par $M$). Elle s'exprime par la formule :

Aire_secteur_MHU=$F(a)-F(x)$.

D'où :

$$\text{Aire\_secteur\_MHU}=\frac{\pi ab}{4}-\frac{b}{2}\left(x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

Le foyer $F_2$ ayant pour coordonnées $\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$, si $M$ est à droite de $F_2$, l'aire du triangle $F_2HM$ est :

$$aire(triangle\_F_2HM)=\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{a^2-b^2}\right)b\left(\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right),$$

et l'aire totale du secteur elliptique $F_2UM$ est la somme des deux :

$$A(x)=aire(secteur\_F_2UM)=\frac{b}{2}\left(x-\sqrt{a^2-b^2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{\pi ab}{4}-\frac{b}{2}\left(x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$=\frac{b}{2}\left(\left(x-\sqrt{a^2-b^2}\right)\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{\pi a}{2}-x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$=\frac{b}{2}\left(x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{\pi a}{2}-x\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

$$=\frac{b}{2}\left(-\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}+\frac{\pi a}{2}-a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right)$$

D'où la formule :

$$aire(secteur\_F_2UM)=\frac{b}{2}\left(\frac{\pi a}{2}-\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}-a\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)\right).$$

- **En coordonnées polaires**

Soit une surface du plan délimitée par la courbe continue $r(\theta)$ et les demi-droites $\vartheta=a$ et $\vartheta=b$, où $0<b-a<2\pi$ ($a$ et $b$ étant des réels). Alors l'aire $S$ de cette surface est :

$$S=\frac{1}{2}\int_a^b r^2(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Si l'ellipse est donnée par l'équation intrinsèque :

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos(\vartheta-\vartheta_0)}$$

et si l'on prend le point $U$ comme origine des angles ($\vartheta=0$), le point $M$ correspondant à l'angle $\vartheta$, l'aire du secteur $F_2UM$ sera :

$$A=aire(secteur\_F_2UM)=\frac{p^2}{2}\int_0^{\vartheta}\frac{1}{\left(1+e\cos(\eta)\right)^2}\,d\eta$$

On peut calculer explicitement cette intégrale. On trouve, avec $\tau=\tan\left(\frac{\vartheta}{2}\right)$, $y=\arctan\frac{(1-e)\tau}{\sqrt{1-e^2}}$ :

$$A=\frac{2}{1-e^2}\left(\frac{y}{\sqrt{1-e^2}}-\frac{e\tau}{\tau^2(1-e)+(1+e)}\right).$$

## II. L'ellipse et les lois dynamiques

L'ellipse joue un rôle fondamental dans la compréhension des lois de la Nature puisque, selon les lois de Kepler, tout corps en rotation autour d'un autre décrit une orbite elliptique. Pour la présentation, nous nous limitons au cas d'une planète autour du Soleil, cas que Kepler avait considéré.

### *A. Première Loi de Kepler*

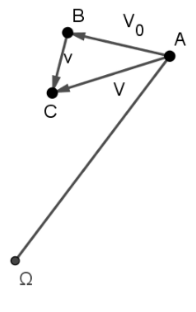
La première loi s'énonce : l'orbite est constamment située dans un plan fixe. Elle constitue une ellipse dont le Soleil occupe l'un des foyers.

Il n'était nullement évident, a priori, que l'orbite serait astreinte à rester dans un plan : elle pourrait consister en des oscillations en 3d. Il n'est pas non plus évident que le plan soit fixe : il pourrait osciller au cours du temps.

On pose souvent la question (naïve, mais très pertinente) : qu'y a-t-il à l'autre foyer ? La réponse, en ce qui concerne le système solaire est : physiquement, rien. Mais la rotation de la planète autour du Soleil peut se faire dans un sens ou dans l'autre et on peut regarder le système du dessus ou du dessous : les deux foyers jouent des rôles symétriques et une représentation mathématique, comme Kepler la présente, ne peut se contenter d'un seul foyer.

Chose étonnante : la première loi de Kepler n'impose aucune restriction à la forme de l'ellipse. N'importe quelle ellipse, qu'elle soit très arrondie ou très allongée, peut être la trajectoire d'une planète. Il faudra seulement que le Soleil soit situé en l'un des foyers. La masse de la planète peut être quelconque. Ces propriétés ne sont pas du tout intuitives.

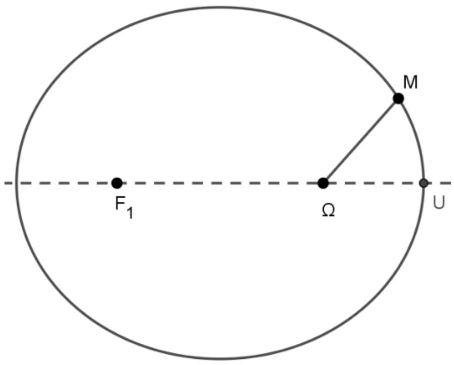
Le fait que l'ellipse soit constamment dans un plan fixe est par contre assez intuitif, comme on va le voir.




Soit $\Omega$ le centre de la Terre et $A$ une position de la planète ; elle est animée d'une vitesse $\overrightarrow{V_0}$. Soit $B$ l'extrémité de $\overrightarrow{V_0}$. Les trois points $\Omega, A, B$ déterminent un plan. S'il n'y avait pas de force d'attraction, la planète se retrouverait en $B$. La force d'attraction la ramène en $C,$ qui est sur la droite $B\Omega,$ donc dans le même plan que précédemment, et ainsi de suite à tous les instants de la trajectoire.

Le fait que la trajectoire soit une ellipse sera démontré plus loin. C'est beaucoup plus difficile et n'est pas vrai en toute circonstance : si on lance un satellite avec vitesse initiale insuffisante, il s'écrase sur la planète ; si la vitesse initiale est excessive, il se perd dans l'espace.

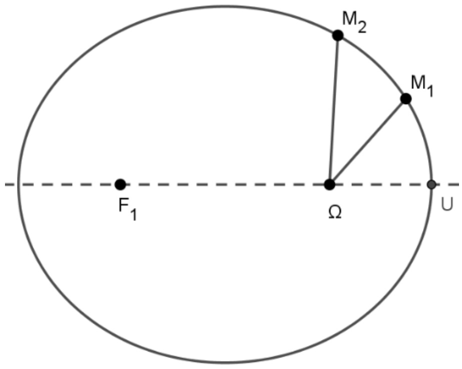
### B. Seconde Loi de Kepler




La seconde loi de Kepler stipule que le rayon vecteur Soleil-Planète parcourt des aires égales en des temps égaux.

Dans la figure ci-contre, $\Omega$ désigne la position du Soleil, qui est à l'un des foyers de l'ellipse (et non au centre), $M$ désigne la position de la planète sur l'ellipse. Le point $U$ est à l'extrémité du grand axe, du côté de $\Omega$ : c'est l'intersection de l'ellipse avec le prolongement du vecteur $\overrightarrow{F_1\Omega}$.

La seconde loi dit que l'aire du secteur elliptique $U\Omega M$ est proportionnelle au temps mis par la planète pour aller de $U$ à $M$.



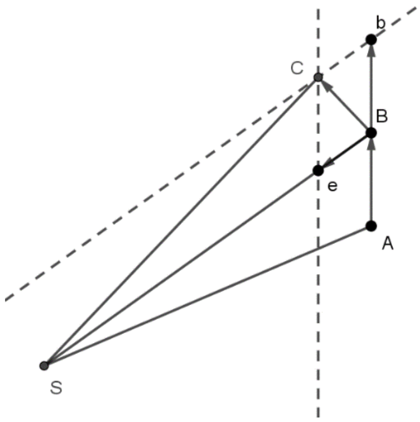

Cela revient à dire que, si les secteurs elliptiques $U\Omega M_1$ et $M_1\Omega M_2$ ont même aire, le temps mis par la planète pour aller de $U$ à $M_1$ sera égal au temps qu'elle mettra pour aller de $M_1$ à $M_2$.

Attention : les aires ne sont pas mesurées à partir du centre de l'ellipse, mais à partir de la position du Soleil : point $\Omega$, second foyer de l'ellipse.

La proposition suivante est reproduite de Feynman, qui la tenait de Newton, qui la tenait de Kepler, qui la tenait d'Archimède :

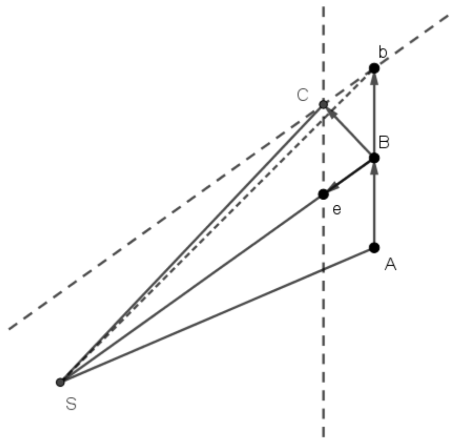
**Proposition.** – *Si un mouvement plan résulte d'une force centrale, le rayon vecteur décrit des aires égales en des temps égaux.*

Le point essentiel est qu'aucune hypothèse sur la nature de la force n'est imposée ; elle n'a pas à être en $1/r^2$. La démonstration se fait selon les méthodes d'Archimède.




**Démonstration.** – Soit une planète gravitant autour du Soleil (en $S$). On discrétise le mouvement de la planète, initialement en $A$. Au bout d'un intervalle de temps, la planète se retrouve en $B$. Elle est attirée par le Soleil, situé au point $S$.

Au point $B$, si elle continuait par inertie, sans attraction, elle se retrouverait en $b$ avec $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{Bb}$. Si elle était immobile en $B$, elle se dirigerait vers $S$ et se retrouverait en $e$, sur le segment $BS$. En définitive, elle se retrouve en $C$, tel que $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{Bb} + \overrightarrow{Be}$ (somme vectorielle : voir figure).




Il est évident que les triangles $SAB$ et $SBb$ ont la même aire : ils ont un côté commun ($SB$) et des hauteurs égales, puisque $AB = Bb$.

Reste à montrer que $SBb$ et $SBC$ ont la même aire. Comme $bC$ est parallèle à $BS$, les hauteurs menées de $b$ et $C$ sur $BS$ ont même longueur, ce qui prouve la Proposition.

Voici une version moderne, en coordonnées polaires :

**Proposition.** - *En coordonnées polaires, l'énoncé "aires égales en des temps égaux" se traduit par :*

$$r^2\dot{\vartheta} = C$$

*où* $r, \vartheta$ *sont les coordonnées polaires intrinsèques (donc liées au foyer et non au centre) et* $\dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}$.

**Démonstration**

(voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Coordonnées_polaires, calcul intégral)

Soit $A$ une surface du plan délimitée par la courbe continue $r(\theta)$ et les demi-droites $\vartheta = a$ et $\vartheta = b$, où $0 < b - a < 2\pi$ ($a$ et $b$ étant des réels). Alors l'aire $S$ de cette surface est :

$$S = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(\vartheta)\, d\vartheta .$$

Si on prend $\vartheta(0) = 0$, l'aire entre le temps $t = 0$ et le temps $t$ doit être proportionnelle à $t$ :

$$\int_a^{\vartheta(t)} r^2(u)\, du = \lambda t$$

et en dérivant par rapport à $t$ :

$$r^2(\vartheta(t))\dot{\vartheta}(t) = \lambda$$

Ceci prouve la Proposition. La constante $C$ ci-dessus s'appelle "constante des aires" ; elle est déterminée par les conditions initiales. L'aire parcourue par le rayon vecteur par unité de temps est égale à $C/2$.

# III. Détermination de la trajectoire de la planète

A priori, on connaît seulement la relation résultant de la gravitation universelle :

$$F = \frac{kMm}{r^2} \quad (1)$$

où $k$ est la constante universelle de gravitation, $M$ est la masse du Soleil, $m$ celle de la planète et $r$ la distance qui les sépare. La première loi de Kepler dit que la planète décrit une ellipse dont le Soleil est l'un des foyers. Ce n'est pas tout à fait exact : c'est le barycentre (Soleil, Terre) qui se trouve au foyer. Mais comme le Soleil est beaucoup plus gros, on peut admettre l'approximation.

On déduit de (1) :

$$\gamma = \frac{kM}{r^2} \quad (2)$$

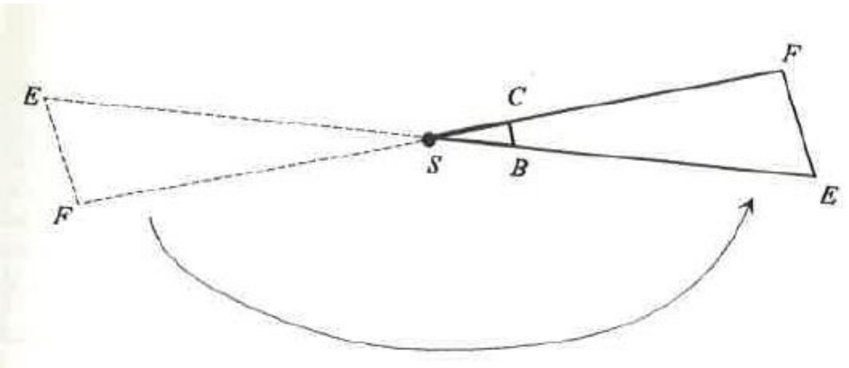
où $\gamma$ est l'accélération de la planète, dirigée vers le centre du Soleil, considéré comme fixe.

Il n'est pas facile de déduire la forme de l'orbite à partir de (2), d'autant que cette forme dépend des conditions initiales, qui n'apparaissent pas dans (2).

### A. *Une erreur de Richard Feynman*

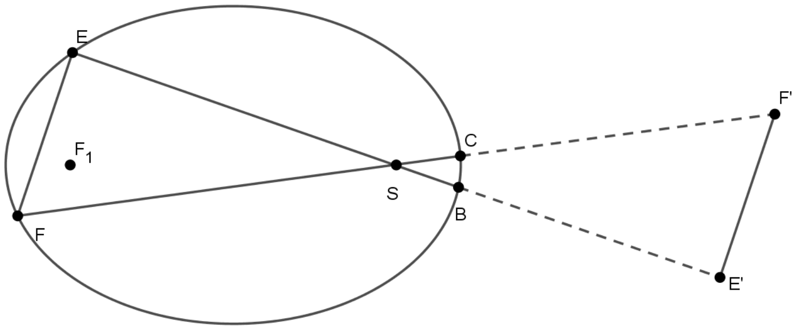
L'énoncé donné dans [Feynman], page 126 : "nous avons prouvé que les lois de Newton, avec une force de gravité en $r^{-2}$ dirigée vers le Soleil, engendrent des orbites planétaires elliptiques" est évidemment faux : en fonction des conditions initiales, la trajectoire peut être une hyperbole.

Pour sa démonstration, Feynman décide de découper l'orbite en secteurs de même angle au centre, et non plus de même temps. Il dit, page 105 : "nous savons que la planète va plus vite de B à C que de E à F. Pour savoir exactement combien de fois plus vite, nous devons comparer les surfaces des triangles SBC et SEF, puisque les intervalles de temps sont proportionnels aux surfaces balayées. Rappelez-vous que les deux triangles ont le même angle en S. En pivotant SEF de façon à ce qu'il recouvre SBC, on obtient :




(figure reproduite de [Feynman], page 105)

Il affirme ensuite que les deux triangles SEF et SBC sont semblables. C'est évidemment faux. La figure ci-dessous reproduit la précédente :




Le triangle SE'F' est le symétrique de SEF par rapport à S. Il est complètement évident que SBC et SE'F' ne sont pas semblables : BC n'est pas parallèle à E'F'.

### *B. Comment procéder ?*

Il n'est pas facile de déduire la forme de la trajectoire directement de la loi de l'attraction, d'autant que, comme nous l'avons dit, la trajectoire dépend des conditions initiales. Il nous paraît impossible de le faire par des considérations de géométrie élémentaire, comme Feynman prétend le faire. On peut assurément résoudre l'équation (2) et les constantes qui interviendront dans la résolution détermineront la forme de la trajectoire.

La meilleure méthode paraît être de recourir à une expression sous forme d'énergie. Du fait de la pesanteur, la planète a une énergie potentielle $E_p = -\frac{kmM}{r}$ où $k$ est la constante universelle de gravitation et du fait du mouvement, une énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}mv^2$ et la somme des deux, appelée énergie mécanique $E_m$, doit rester constante. Sous cette forme, on a l'impression que la masse de la planète apparaît ; or on sait qu'elle n'intervient pas dans la forme de la trajectoire. Il faut donc écrire l'équation en faisant référence aux conditions initiales :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{kmM}{r} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{kmM}{r_0}$$

Si l'on pose $\mu = kM$, ceci se simplifie en :

$$\frac{1}{2}v^2 - \frac{\mu}{r} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{\mu}{r_0}$$

On résout ceci en passant en coordonnées polaires ; on obtient les équations :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{C^2}{2r^2} - \frac{\mu}{r} = cste \\ r^2\dot{\vartheta} = C \end{cases}$$

En posant $u = \frac{1}{r}$, on trouve :

$$u(\vartheta)=\frac{\mu}{C^2}+A\cos(\vartheta-\vartheta_0)$$

d'où l'expression :

$$r=\frac{p}{1+e\cos(\vartheta-\vartheta_0)},\text{ avec } p=\frac{C^2}{\mu}.$$

Le type de trajectoire se déduit du signe de l'énergie mécanique ; elle est elliptique si et seulement si $E_m<0,$ c'est-à-dire, pour les conditions initiales :

$$\frac{1}{2}v_0^2<\frac{\mu}{r_0}\text{, ou encore } r_0v_0^2<2\mu.$$

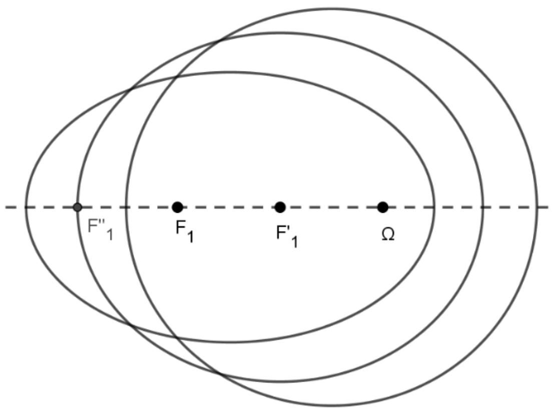
Lorsque les paramètres de l'ellipse sont connus ($a,b,$ d'où l'on déduit $e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$), on peut calculer explicitement l'aire d'un secteur elliptique d'angle $\vartheta$ ; la seconde loi de Kepler stipule que cette aire sera la même, où que soit le secteur elliptique sur l'orbite, pourvu que l'angle $\vartheta$ soit le même.

On ne sait pas comment Kepler a pu avoir l'intuition d'une telle loi et comment il a pu calculer l'aire des secteurs angulaires à partir des données disponibles à l'époque (visées angulaires de Tycho Brahé). Les coordonnées cartésiennes n'existaient pas à l'époque (Descartes est postérieur à Kepler). Sans doute Kepler a-t-il eu recours à une discrétisation, comme le faisait Archimède. Les étapes de son travail ne nous sont pas parvenues.

### *C. Troisième Loi de Kepler*

Elle stipule que, pour chaque planète, la durée totale d'une rotation est proportionnelle à $a^{3/2}$, où $a$ est, comme précédemment, la longueur du demi grand axe de l'ellipse.

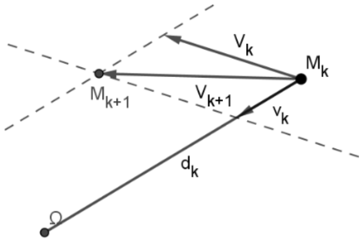
Cette loi est extrêmement surprenante, parce que le petit axe n'apparaît pas. Autrement dit, si deux planètes ont même grand axe et des petits axes différents, elles auront le même temps de révolution.




Sur la figure ci-contre, les trois ellipses ont même foyer $\Omega$ et même valeur pour le grand axe $a$ ; les temps de révolution des trois planètes seront donc les mêmes. Mais, bien sûr, comme les longueurs de la trajectoire ne sont pas les mêmes, les vitesses ne seront pas les mêmes.

### *D. Construction discrétisée d'une ellipse*

Nous montrons ici comment construire une ellipse, en utilisant uniquement le fait que, à chaque instant, le mobile est soumis à l'attraction de la planète. C'est ce que voulait faire Feynman, mais nous avons vu plus haut que son approche n'était pas correcte.




L'intervalle de temps de discrétisation sera la seconde. A un instant $t_k$, la position du mobile sera $M_k$ et il est animé d'une vitesse $\overrightarrow{V_k}$.

On considère que, à cet instant, il est brutalement soumis à l'attraction de la pesanteur, sous la forme d'une accélération $\gamma = \frac{c}{d_k^2}$, où $d_k$ est la distance entre $\Omega$, position de la planète, et le mobile $M_k$. Cette accélération est dirigée vers $\Omega$. Elle se manifeste par une variation instantanée de vitesse $\gamma = \frac{v - v_0}{\tau}$, où $\tau$ est l'intervalle de temps, ici une seconde. La vitesse initiale dans le sens $M_k\Omega$ étant nulle, on écrira simplement que, du fait de l'attraction, le mobile est soumis à une vitesse $\overrightarrow{v_k}$, orientée vers $\Omega$, de module $v_k = \frac{\mu}{d_k^2}$. La constante $\mu$ dépend de la constante universelle de gravitation, de la masse centrale (Soleil ou planète), mais non de la masse du satellite. Pour la Terre, elle vaut approximativement $\mu = 398\,600.441\ km^3/s^2$.

La vitesse adoptée par le mobile est alors la somme vectorielle $\overrightarrow{V_{k+1}} = \overrightarrow{V_k} + \overrightarrow{v_k}$ et la position ultérieure du mobile, $M_{k+1}$, est à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{V_{k+1}}$.

Notons $(x_k, y_k)$ les coordonnées de $M_k$ et $(Vx_k, Vy_k)$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{V_k}$. Les composantes du vecteur vitesse centripète $\overrightarrow{v_k}$ sont $\overrightarrow{v_k} = \left( \frac{-\mu x_k}{d_k^3}, \frac{-\mu y_k}{d_k^3} \right)$, où $d_k = \left( x_k^2 + y_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$. Les composantes du nouveau vecteur vitesse $\overrightarrow{V_{k+1}} = \overrightarrow{V_k} + \overrightarrow{v_k}$ seront donc :

$$\overrightarrow{V_{k+1}} = \left( Vx_k - \frac{\mu x_k}{d_k^3}, Vy_k - \frac{\mu y_k}{d_k^3} \right),$$

et la nouvelle position du mobile sera :

$$M_{k+1} = \left( x_k + Vx_k - \frac{\mu x_k}{d_k^3}, y_k + Vy_k - \frac{\mu y_k}{d_k^3} \right).$$

L'aire du triangle $\Omega M_k M_{k+1}$ vaut $aire = \frac{1}{2} \left| x_k y_{k+1} - x_{k+1} y_k \right|$ ; on constate qu'elle est constante.

L'angle $\vartheta_k$ est défini par $\tan\left(\vartheta_k\right)=\dfrac{y_k}{x_k}$.

# IV. Détermination des paramètres à partir de trois visées

Il peut être utile, en mécanique spatiale, de déterminer complètement la trajectoire d'un corps que l'on vient de détecter, par exemple un astéroïde ou une comète. Les lois de Kepler permettent cette reconstitution à partir de trois visées seulement. Par "visée", il faut entendre : détermination de l'angle et de la distance. On sait que la trajectoire sera plane (première loi de Kepler) et on se place dans ce plan. L'angle initial $\vartheta_0$ n'est pas connu : il fait partie du problème.

## *A. A partir de l'équation intrinsèque*

On part de l'équation intrinsèque :

$$\rho=\frac{p}{1+e\cos\left(\vartheta-\vartheta_0\right)}$$

et on suppose trois mesures réalisées en des points $M_1, M_2, M_3$. Les inconnues sont les paramètres de la trajectoire, à savoir $p, e, \vartheta_0$.

On a les trois équations :

$$\begin{cases}\rho_1=\dfrac{p}{1+e\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)}\\ \rho_2=\dfrac{p}{1+e\cos\left(\vartheta_2-\vartheta_0\right)}\\ \rho_3=\dfrac{p}{1+e\cos\left(\vartheta_3-\vartheta_0\right)}\end{cases}$$

et par conséquent :

$$\begin{cases}\dfrac{\rho_1}{\rho_2}=\dfrac{1+e\cos\left(\vartheta_2-\vartheta_0\right)}{1+e\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)}\\ \dfrac{\rho_1}{\rho_3}=\dfrac{1+e\cos\left(\vartheta_3-\vartheta_0\right)}{1+e\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)}\end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} 1+e\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)=\dfrac{\rho_2}{\rho_1}\left(1+e\cos\left(\vartheta_2-\vartheta_0\right)\right) \\ 1+e\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)=\dfrac{\rho_3}{\rho_1}\left(1+e\cos\left(\vartheta_3-\vartheta_0\right)\right) \end{cases}$$

La première équation permet de calculer $e$ :

$$\rho_1+e\rho_1\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)=\rho_2+e\rho_2\cos\left(\vartheta_2-\vartheta_0\right)$$

$$e=\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\rho_2\cos\left(\vartheta_2-\vartheta_0\right)}$$

La seconde s'écrit :

$$e\left(\rho_1\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\rho_3\cos\left(\vartheta_3-\vartheta_0\right)\right)=\rho_3-\rho_1$$

et en reportant la valeur de $e$, on obtient une équation en la seule inconnue $\vartheta_0$ :

$$\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\rho_2\cos\left(\vartheta_2-\vartheta_0\right)}\left(\rho_1\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\rho_3\cos\left(\vartheta_3-\vartheta_0\right)\right)=\rho_3-\rho_1$$

$$\rho_1\left(\rho_2-\rho_1\right)\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\rho_3\left(\rho_2-\rho_1\right)\cos\left(\vartheta_3-\vartheta_0\right)=\rho_1\left(\rho_3-\rho_1\right)\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)-\rho_2\left(\rho_3-\rho_1\right)\cos\left(\vartheta_2-\vartheta_0\right)$$

On sait que :

$$\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)=\cos\left(\vartheta_1\right)\cos\left(\vartheta_0\right)+\sin\left(\vartheta_1\right)\sin\left(\vartheta_0\right).$$

Il sera commode de noter $c_1=\cos\left(\vartheta_1\right), s_1=\sin\left(\vartheta_1\right)$, *etc.*

On a alors :

$$\cos\left(\vartheta_1-\vartheta_0\right)=c_1c_0+s_1s_0,$$

et donc :

$$\rho_1\left(\rho_2-\rho_3\right)\left(c_1c_0+s_1s_0\right)-\rho_3\left(\rho_2-\rho_1\right)\left(c_3c_0+s_3s_0\right)+\rho_2\left(\rho_3-\rho_1\right)\left(c_2c_0+s_2s_0\right)=0$$

ce qui s'écrit :

$$s_0\left(\rho_1\left(\rho_2-\rho_3\right)s_1-\rho_3\left(\rho_2-\rho_1\right)s_3+\rho_2\left(\rho_3-\rho_1\right)s_2\right)=-c_0\left(\rho_1\left(\rho_2-\rho_3\right)c_1-\rho_3\left(\rho_2-\rho_1\right)c_3+\rho_2\left(\rho_3-\rho_1\right)c_2\right)$$

et donc :

$$\frac{s_0}{c_0} = -\frac{\rho_1(\rho_2-\rho_3)c_1 - \rho_3(\rho_2-\rho_1)c_3 + \rho_2(\rho_3-\rho_1)c_2}{\rho_1(\rho_2-\rho_3)s_1 - \rho_3(\rho_2-\rho_1)s_3 + \rho_2(\rho_3-\rho_1)s_2}$$

d'où :

$$\tan(\vartheta_0) = -\frac{\rho_1(\rho_2-\rho_3)c_1 - \rho_3(\rho_2-\rho_1)c_3 + \rho_2(\rho_3-\rho_1)c_2}{\rho_1(\rho_2-\rho_3)s_1 - \rho_3(\rho_2-\rho_1)s_3 + \rho_2(\rho_3-\rho_1)s_2}$$

$$\vartheta_0 = -\arctan\frac{\rho_1(\rho_2-\rho_3)c_1 - \rho_3(\rho_2-\rho_1)c_3 + \rho_2(\rho_3-\rho_1)c_2}{\rho_1(\rho_2-\rho_3)s_1 - \rho_3(\rho_2-\rho_1)s_3 + \rho_2(\rho_3-\rho_1)s_2}$$

La valeur de $\vartheta_0$ nous donne le grand axe de l'ellipse : en faisant $\vartheta = \vartheta_0$ dans l'équation intrinsèque de l'ellipse, le cosinus vaut 1, $\rho$ est minimal et on se trouve au périgée de l'ellipse (point le plus proche de $\Omega$). A l'inverse, pour $\vartheta = \vartheta_0 + \pi$, $\rho$ est maximal et on se trouve à l'apogée de l'ellipse (point le plus éloigné de $\Omega$). Le premier foyer se trouve donc nécessairement sur la droite d'équation $\vartheta = \vartheta_0$ en coordonnées polaires intrinsèques.

Les valeurs de $e, p$ s'obtiennent en reportant dans les équations ci-dessus :

$$e = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1\cos(\vartheta_1-\vartheta_0) - \rho_2\cos(\vartheta_2-\vartheta_0)}$$

$$p = \rho_1 + e\rho_1\cos(\vartheta_1-\vartheta_0)$$

Comme $p = \frac{b^2}{a}$ et $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, on trouve $b^2 = ap,\ e = \frac{\sqrt{a^2-ap}}{a}$, $e^2 = \frac{a^2-ap}{a^2} = 1-\frac{p}{a}$,

$\frac{p}{a} = 1-e^2,\ a = \frac{p}{1-e^2}$, $b^2 = \frac{p^2}{1-e^2}$, $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$.

En définitive, les deux paramètres de l'ellipse sont donnés par les formules :

$$a = \frac{p}{1-e^2},\ b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}.$$

### *B. A partir de la propriété du jardinier*

On peut utiliser la propriété du jardinier pour déterminer la position du premier foyer ; le premier foyer vérifie en effet :

$$FM_1 + M_1\Omega = FM_2 + M_2\Omega = FM_3 + M_3\Omega \ ;$$

d'où les équations :

$$\begin{cases} FM_1 - FM_2 = M_2\Omega - M_1\Omega \\ FM_1 - FM_3 = M_3\Omega - M_1\Omega \end{cases}$$

Les seconds membres sont connus. L'ensemble des points $F$ tels que $FM_1 - FM_2 = cste$ est un arc d'hyperbole dont $M_1, M_2$ sont les foyers. Le point $F$ se trouve donc à l'intersection de deux arcs d'hyperbole, de foyers respectifs $M_1, M_2$ et $M_1, M_3$. Cette construction est correcte en théorie, difficile à réaliser en pratique.

### *C. Par réflexion*

Si on connaît les tangentes en $M_1, M_2$, on peut utiliser la propriété de réflexion : les vecteurs $\Omega M_1$ et $\Omega M_2$ se réfléchissent tous deux en direction de $F_1$. Mais ceci exige que les tangentes soient connues avec précision, ce qui est rarement le cas en pratique. Les tangentes sont portées par les vecteurs vitesse, dont les directions sont difficiles à mesurer avec précision.