Les mystères de l'ellipse, suite et pas fin

par Bernard Beauzamy
04/01/2025

Chacun sait que la première loi de Kepler stipule que les orbites des planètes sont des ellipses dont le Soleil occupe l'un des foyers. Soit, c'est une loi empirique, une constatation que l'on n'a pas à discuter. On peut estimer que c'est scandaleux, que la Nature est mal faite, mais il faut s'en accommoder.

Mais on peut tout de même se poser la question : qu'est-ce qui empêche, par exemple, d'avoir une planète dont la trajectoire serait certes elliptique, mais pour laquelle le Soleil serait au centre de l'ellipse, et non plus un foyer ?

Eh bien là, une fois n'est pas coutume, les mathématiques permettent de répondre à la question : une telle disposition n'est pas possible, sauf si l'orbite est parfaitement circulaire, et la Nature n'est pas si mal faite que cela.

Supposons en effet que nous nous donnions notre ellipse en coordonnées polaires : $x=\rho\cos(\vartheta), y=\rho\sin(\vartheta)$, où le Soleil est au centre, pris comme origine. Soit $M\,(x,y)$ un point courant sur l'ellipse.

Le vecteur vitesse $\vec{V}=\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ a pour composantes : $\vec{V}:\left(\dot{x}=-\rho\sin(\vartheta)\dot{\vartheta},\ \dot{y}=\rho\cos(\vartheta)\dot{\vartheta}\right)$,

où $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$ et de même pour $\dot{y},\dot{\vartheta}$. Le module du vecteur vitesse vérifie :

$$v^2=\left(\rho^2\sin^2(\vartheta)+\rho^2\cos^2(\vartheta)\right)\dot{\vartheta}^2=\rho^2\dot{\vartheta}^2 \quad (1)$$

Rappelons (voir "L'ellipse et ses mystères",
https://www.scmsa.eu/archives/BB_ellipse_mysteres.pdf
proposition page 12 que, si le mouvement résulte d'une force centrale, on a l'égalité (loi des aires) :

$$\dot{\vartheta}=\frac{c_1}{\rho^2} \quad (2)$$

où c_1 est une constante. Il résulte de (1) et (2) que $v^2=\dfrac{c_1^2}{\rho^2}$.

Or, le système étant isolé, son énergie mécanique totale doit rester constante. L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique, de la forme $\frac{1}{2}mv^2$, et de l'énergie potentielle, nécessairement de la forme $\frac{c_2}{\rho}$ puisque l'attraction est en $\frac{k}{\rho^2}$. Il en résulte que la somme $\frac{c_1^2}{\rho^2}+\frac{c_2}{\rho}$ doit rester constante, ce qui requiert ρ constant : nous sommes en présence d'un cercle.