Société de Calcul Mathématique SA

Outils d'aide à la décision

depuis 1995

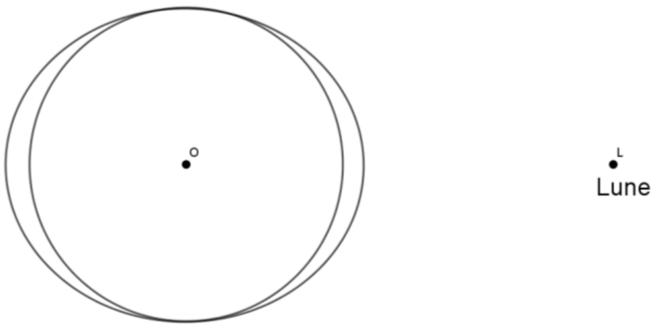
Note sur les doubles marées

Bernard Beauzamy

04/01/2023, rev. 02/01/2024, rev. 06/01/2024

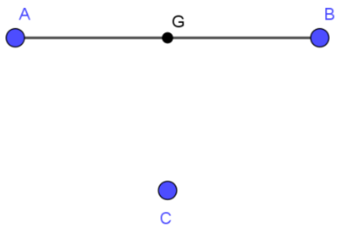
1. Description du sujet

On sait que les marées sont dues à l'action de la Lune ; la Lune attire l'eau située au-dessous. On sait moins qu'il y a en même temps une marée de l'autre côté de la Terre. Les explications que l'on trouve à ce propos sur Internet sont confuses et contradictoires : est-ce l'effet de la gravitation ? est-ce lié au fait que la Terre tourne sur elle-même ? tourne autour du Soleil ? Est-ce lié au fait que la Lune tourne autour de la Terre ?



Le présent article explique le phénomène. Il est faux de dire (comme on le voit partout) que la Lune tourne autour de la Terre : en réalité, les deux tournent autour d'un point, centre de gravité du système Terre-Lune, chacune affectée de sa masse respective. Ce point, noté B dans l'article, est situé à l'intérieur de la Terre, à environ 4 428 km du centre de la Terre. Du fait de cette rotation, les masses d'eau subissent une force centrifuge, d'autant plus importante qu'elles sont éloignées de B. Cette force est maximale pour le point de la Terre situé à l'opposé de la Lune ; même pour le point situé directement sous la Lune, cette force est du même ordre de grandeur que l'attraction Newtonienne : elle ne peut en aucune manière être négligée.

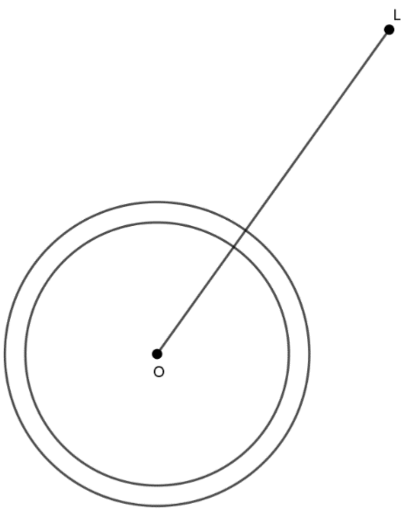
2. Une remarque préliminaire



Si on étudie l'effet d'un champ de gravitation, on ne peut pas supposer que toute la masse est concentrée au centre de gravité. Prenons l'exemple de la figure ci-contre : trois masses de 1 kg, avec $GA = GB = GC = 1\,m$. La barre AB est indéformable, mais la tige entre les deux est de masse nulle.

Le point C exerce sur A une force d'attraction $F_{CA} = \frac{k}{2}$ (k : constante de gravitation) et de même pour F_{CB}. La projection sur GC vaut pour chacune $\frac{k}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{k}{4}\sqrt{2}$, soit un total de $\frac{k\sqrt{2}}{2}$ pour les deux. Si toute la masse de la barre était concentrée en G, à savoir 2 kg, cette force vaudrait $F_{GC} = 2k$: la valeur est différente. Si on allonge la barre, en laissant C immobile, l'effet de la gravitation diminue en $1/d^2$ alors que la position de G ne change pas.

3. Une situation simplifiée



La Terre est entièrement recouverte par les océans ; elle est immobile et la Lune est également immobile ; il y a une fine barre indéformable qui relie les deux planètes.

La Lune ne peut attirer la Terre, puisqu'elles sont reliées par une barre indéformable ; en revanche, elle attire la couche d'océan, qui va se gonfler en direction de la Lune et se vider du côté opposé. Il y aura un seul renflement.

Conclusion : une approche purement statique ne peut à elle seule expliquer la présence de deux renflements ; il faut tenir compte des mouvements, mais lesquels ?

4. Mouvement annuel

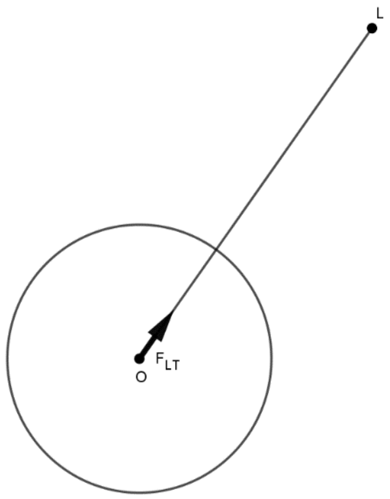
Prenons la figure ci-dessus et faisons-la tourner autour du Soleil en une année ; rien n'est changé au raisonnement précédent et il n'y a toujours qu'un seul renflement.

5. Rotation diurne

Imaginons un mécanisme qui fait que la Lune est fixe, la Terre aussi, mais la Terre tourne sur elle-même : sur une vaste planche, on enfiche deux axes : l'un sert à maintenir la Lune, l'autre est l'axe de rotation de la Terre. La distance entre les deux planètes est invariable. Le raisonnement précédent vaut encore : la Lune attire la part d'océan qui est la plus proche, et il n'y a qu'un seul renflement. Bien sûr, ce renflement va se déplacer avec la rotation de la Terre.

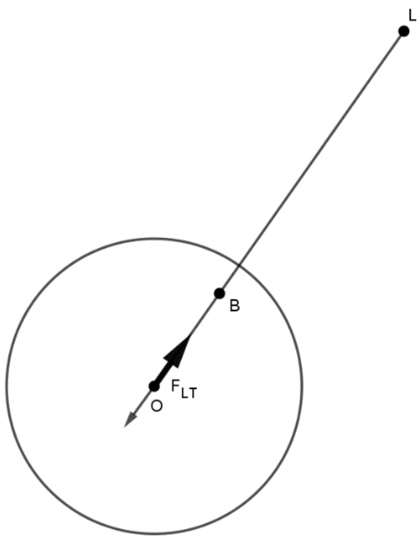
Il résulte de tout ceci que le double renflement est nécessairement dû au fait que la Lune tourne autour de la Terre.

Chacun comprend que le mouvement de la Lune est circulaire (en fait elliptique), du fait que deux forces se compensent : l'attraction de la Terre et la force centrifuge.



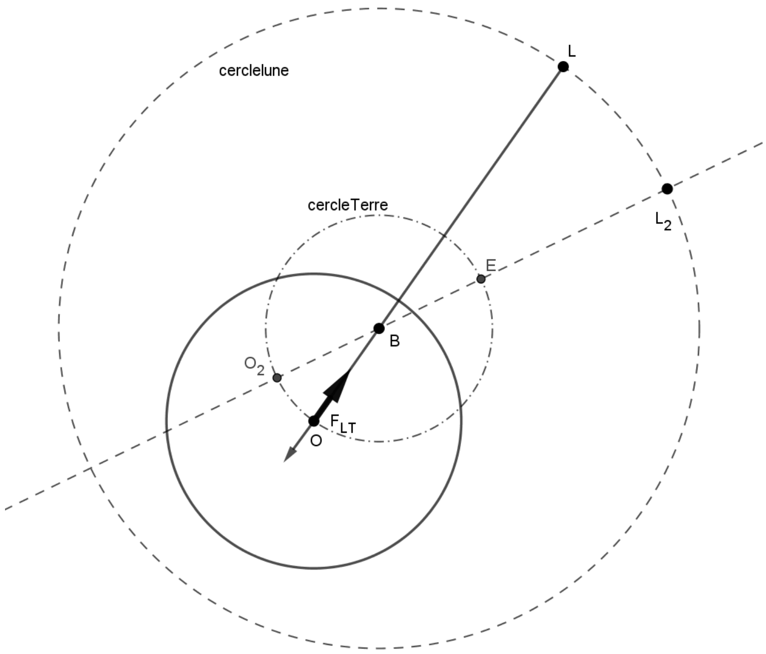
Mais il y a aussi l'attraction que la Lune exerce sur la Terre ; on peut considérer qu'elle s'exerce au point O, centre de la boule. La valeur de cette force n'est pas exactement ce qu'elle serait si toute la masse était concentrée en O (remarque ci-dessus), mais elle en est proche, parce que le rayon de la Terre (6 400 km) est très petit devant la distance Terre-Lune (384 000 km).

Ce diagramme se retrouve souvent sur Internet ; il est légitime car il signifie que l'on se place sur la Lune et qu'on regarde l'attraction qu'elle exerce sur la Terre. Mais, en même temps, il est totalement incompréhensible : il n'y a qu'une seule force, et qu'est ce qui empêche la Terre, dans ces conditions, de se jeter sur la Lune ?



En réalité, le système Terre-Lune tourne autour du barycentre des deux planètes, lequel est situé à l'intérieur de la Terre, à environ 4 650 km du centre, dans la direction de la Lune. C'est le point B dans la figure ci-contre. Du fait de ce mouvement, la Terre est soumise à une force centrifuge, opposée à F_{LT}. Vue de la Lune, la Terre tourne autour de la Lune, sans tomber dessus.

A ce stade, on peut oublier la présence de la Lune, et considérer que la Terre tourne autour d'un axe fiché en B ; il en résulte une force centrifuge, d'autant plus grande que l'on s'éloigne de B : elle est maximale pour les portions d'océan à l'opposé de la Lune, et c'est l'origine du second renflement.



Pour bien comprendre ce qui se passe : la Lune décrit un cercle de centre B et de rayon BL, appelé cercleLune sur la figure. La Terre décrit un cercle de centre B et de rayon BO, appelé cercleTerre sur la figure. La Lune vient en L_2 et le centre de la Terre vient en O_2. La Terre sera donc sur un cercle de centre O_2 et de rayon R_T. La marée opposée à la Lune se fera sur la droite L_2O_2. Dans ce qui suit, les calculs sont simplifiés, l'attraction du Soleil est négligée, etc.

6. Données numériques

Masse de la Terre : $M_T \approx 6\times10^{24}\ kg$

Masse de la Lune : $M_L \approx 7\times10^{22}\ kg$

Rayon de la Terre : $R_T \approx 6\,400\ km = 6.4\times10^{6}\ m$

Distance entre le centre de la Terre et celui de la Lune : $d = d_{T,L} \approx 384\,000\ km = 0.384\times10^{9}\ m$

Position du barycentre Terre-Lune, B (O est le centre de la Terre) :

$$d\left(O,B\right) = \frac{M_L d}{M_T + M_L} \approx \frac{7\times10^{22}\times384\,000}{6\times10^{24}+7\times10^{22}} = \frac{7\times384\,000}{607} \approx 4\,428\ km = 4.4\times10^{6}\ m$$

Attraction Newtonienne de la Terre sur la Lune :

$F_{T,L} \approx \dfrac{kM_TM_L}{d^2}$, où k est la constante universelle de gravitation :

$k \approx 6,7\times10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$

$$F_{T,L} \approx \frac{kM_T M_L}{d^2} \approx 0.19 \times 10^{21}\, Newton$$

Cette formule est approximativement correcte, car le rayon de la Terre est très petit devant la distance Terre-Lune.

Comme la Lune a un mouvement stable autour de la Terre, la force centrifuge à laquelle la Lune est soumise est égale à l'attraction, donc :

$F_{L,centr} = F_{T,L}$, d'où :

$$M_L \Omega^2 d\left(B,L\right) = \frac{kM_T M_L}{d^2}$$

où Ω est la vitesse angulaire de la Lune, en radians par seconde. Ceci s'écrit encore :

$$\Omega^2 d\left(B,L\right) = \frac{kM_T}{d^2} \quad (1)$$

Or $d\left(B,L\right) = d\left(O,L\right) - d\left(O,B\right) = d - \frac{M_L d}{M_T + M_L} = \frac{M_T d}{M_T + M_L}$

En reportant dans (1) :

$$\Omega^2 \frac{M_T d}{M_T + M_L} = \frac{kM_T}{d^2}$$

et après simplification :

$$\Omega^2 = \frac{k\left(M_T + M_L\right)}{d^3} \approx \frac{kM_T}{d^3}$$

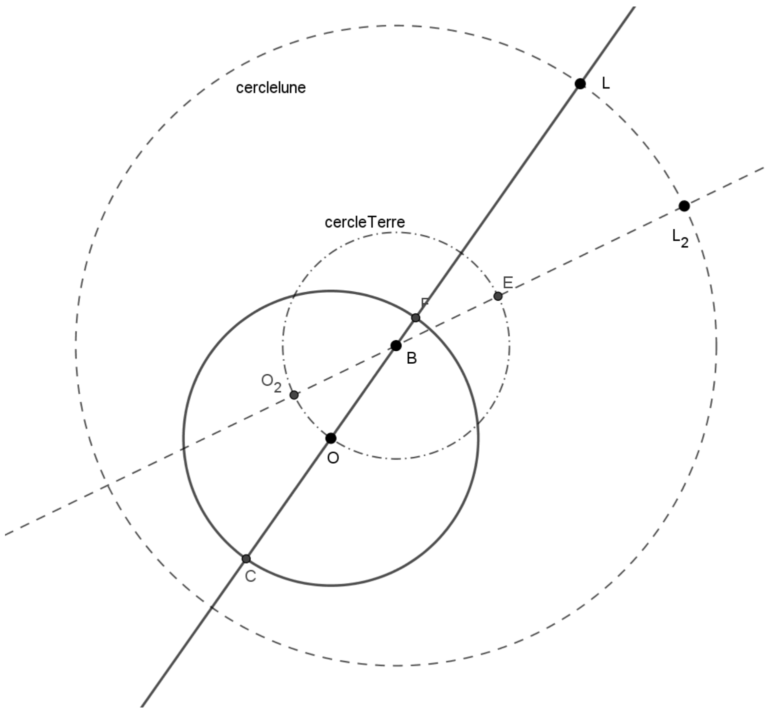
$$\Omega = \sqrt{\frac{kM_T}{d^3}} \approx 0.27 \times 10^{-5}\ rd/s\,.$$

Le temps nécessaire pour faire un tour complet est donc :

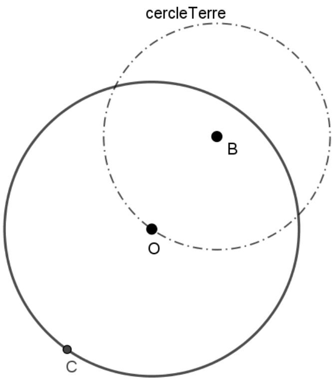
$T_s = \frac{2\pi}{\Omega} \approx 2358107.928$ en secondes, soit environ 27 jours et 7 heures.

Attraction Newtonienne de la Lune sur 1 kg d'eau, situé juste au-dessous :

$$F_1 = \frac{kM_L}{\left(d - R_T\right)^2} \approx 0.33 \times 10^{-4}\ N$$



Force centrifuge s'exerçant au point C, aux antipodes de la position de la Lune. Pour bien comprendre le problème, il est préférable de faire abstraction de la Lune :



La Terre tourne autour d'un point fixe, qui est B ; le centre de la Terre décrit un cercle (appelé cercleTerre sur la figure) et ceci prend 27 jours. Ce mouvement est réel, et est indépendant de la rotation diurne et de la rotation autour du Soleil. Un kg d'eau situé en C (point le plus éloigné de B) sera donc soumis à une force centrifuge, qui vaut :

$$F_2 = m\,\Omega^2 r$$

où $m=1$, Ω est le même que précédemment et :

$$r = d(C,B) = R_T + d(O,B) = R_T + \frac{M_L d}{M_T + M_L} \approx 6.4\times10^6 + \frac{7\times10^{22}\times0.384\times10^9}{6\times10^{24}+7\times10^{22}} \approx 0.11\times10^8\ m$$

On trouve :

$$F_2 = \frac{kM_T}{d^3}\left(R_T + \frac{M_L d}{M_T + M_L}\right) \approx 0.77\times10^{-4}\ N$$

Il faut retrancher à cela l'attraction Newtonienne que la Lune exerce sur ce kg d'eau ; elle vaut :

$$F_2' = \frac{kM_L}{\left(d + R_T\right)^2} \approx 0.31\times10^{-4} N.$$

La force aux antipodes est donc :

$$F_2 - F_2' \approx 0.46\times10^{-4}\ N.$$

Elle est légèrement supérieure à la force due à l'attraction directe de la Lune. A priori, ce résultat est surprenant. Mais il faut rajouter à F_1 la force centrifuge $F_{1,c}$ due à la rotation autour du point B. Elle vaut :

$F_{1,c} = m\Omega^2 r$, où $m = 1$, Ω est le même que précédemment et $r = r_T - OB \approx 0.44\times10^7\ m$;

$$F_{1,c} = m\Omega^2 r \approx 0.31\times10^{-4}\ N$$

Au total, 1 kg d'eau situé directement sous la Lune est soumis à une force :

$$F_{tot} \approx 0.33\times10^{-4} + 0.31\times10^{-4} \approx 0.64\times10^{-4}\ N$$

et cette force est supérieure à celle qui s'exprime du côté opposé.