Compléments sur les taux de risque

Bernard Beauzamy

Novembre 2019

Supposons que, sur N essais, nous ayons enregistré n accidents. Nous savons que la densité de probabilité du taux de risque est donnée par :

$$f_{n,N}(x) = \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} x^n (1-x)^{N-n}$$

Nous voulons déterminer un intervalle de confiance à ε près pour le taux de risque.

Proposition. – *Intervalle de confiance pour un taux de risque.*

Soit $\varepsilon > 0$. *Alors un intervalle de confiance* $[x_1, x_2]$ *tel que* $\int_0^{x_1} f_{n,N}(t)\,dt \le \varepsilon$ *et* $\int_{x_2}^{1} f_{n,N}(t)\,dt \le \varepsilon$

est donné par les nombres :

$$x_1 = \frac{y_1}{N-n+1},\ x_2 = \frac{y_2}{N-n+1}$$

où y_1, y_2 *sont, respectivement, les solutions des systèmes :*

$$e^{-y}(1+y) = 1-\varepsilon,\ e^{-y}(1+y) = \varepsilon$$

obtenues, pour $\varepsilon > 0$ *fixé, par des procédures numériques.*

Démonstration de la Proposition

Nous commençons par calculer la primitive de $f_{n,N}$ nulle en 0 :

Lemme 1. - *La primitive de* $f_{n,N}$ *nulle en 0 est :*

$$F_{n,N}(x) = 1 - \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{(1-x)^{k+N-n+1}}{k+N-n+1}$$

ce qui s'écrit encore, avec $j = n - k$:

$$F_{n,N}(x) = 1 - \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \frac{(1-x)^{N-j+1}}{N-j+1}$$

Démonstration du Lemme 1

Calculons la dérivée $F'_{n,N}$; on a :

$$\begin{aligned} F'_{n,N}(x) &= \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1-x)^{k+N-n} \\ &= \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} (1-x)^{N-n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (1-x)^k \\ &= \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} (1-x)^{N-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x-1)^k = \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} (1-x)^{N-n} x^n \end{aligned}$$

et donc $F'_{n,N} = f_{n,N}$. Il est clair que $F_{n,N}(1) = 1$. Comme $\int_0^1 f_{n,N}(x)\,dx = 1$, il en résulte que $F_{n,N}(0) = 0$. Ceci prouve le Lemme 1.

Il en résulte que :

$$0 = F_{n,N}(0) = 1 - \frac{(N+1)!}{n!(N-n)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+N-n+1}$$

d'où l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{1}{k+N-n+1} = \frac{n!(N-n)!}{(N+1)!} \qquad (1)$$

que nous utiliserons par la suite.

Lemme 2. – *Si n est petit devant N, on a, pour tout $x < \frac{n}{N}$:*

$$F_{n,N}(x) \approx 1 - (1-x)^{N-n+1} \left(1 + (N-n+1)x\right)$$

Démonstration du Lemme 2

On a, pour tout x, $0 \le x \le 1$:

$$1-kx \le (1-x)^k \le 1-kx+\frac{k(k-1)}{2}x^2 \quad (2)$$

On a :

$$F_{n,N}(x)=1-\frac{(N+1)!}{n!(N-n)!}(1-x)^{N-n+1}\sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\binom{n}{k}\frac{(1-x)^k}{k+N-n+1}$$

Pour obtenir une majoration de $\sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\binom{n}{k}\frac{(1-x)^k}{k+N-n+1}$, et donc une minoration de F, on majore $(1-x)^k$ au moyen de (2) pour k pair et on le minore, toujours au moyen de (2), pour k impair. On obtient :

$$F_{n,N}(x)\ge 1-\frac{(N+1)!}{n!(N-n)!}(1-x)^{N-n+1}\sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\binom{n}{k}\frac{1-kx}{k+N-n+1}-$$
$$-\frac{(N+1)!}{n!(N-n)!}(1-x)^{N-n+1}\sum_{k_1=0}^{n/2}\binom{n}{2k_1}\frac{1}{2k_1+N-n+1}\frac{k_1(k_1-1)x^2}{2}$$

et de même :

$$F_{n,N}(x)\le 1-\frac{(N+1)!}{n!(N-n)!}(1-x)^{N-n+1}\sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\binom{n}{k}\frac{1-kx}{k+N-n+1}+$$
$$+\frac{(N+1)!}{n!(N-n)!}(1-x)^{N-n+1}\sum_{k_1=0}^{n/2}\binom{n}{2k_1}\frac{1}{2k_1+N-n+1}\frac{k_1(k_1-1)x^2}{2}$$

On utilise l'approximation $(1-x)^k \approx 1-kx$, valable pour x petit. Il vient :

$$F_{n,N}(x)\approx 1-\frac{(N+1)!}{(N-n)!}(1-x)^{N-n+1}\sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{1-kx}{k+N-n+1}$$
$$=1-\frac{(N+1)!}{(N-n)!}(1-x)^{N-n+1}(A+xB)$$

avec :

$$A=\sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{1}{k+N-n+1}$$

$$B=-\sum_{k=0}^{n}\ (-1)^k\frac{1}{k!(n-k)!}\frac{k}{k+N-n+1}$$

Nous allons nous servir de l'identité (1) pour calculer B :

$$
\begin{aligned}
B &= -\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!(n-k)!} \frac{k}{k+N-n+1} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} \frac{1}{k-1+N-(n-1)+1} \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{1}{j!(n-1-j)!} \frac{1}{j+N-(n-1)+1}
\end{aligned}
$$

Autrement dit, c'est la même formule que pour A avec n remplacé par $n-1.$ On en déduit :

$$
B = \frac{(N-n+1)!}{(N+1)!}
$$

En reportant, on obtient :

$$
\begin{aligned}
F_{n,N}(x) &\approx 1 - \frac{(N+1)!}{(N-n)!}(1-x)^{N-n+1}\left(\frac{(N-n)!}{(N+1)!} + x\frac{(N-n+1)!}{(N+1)!} \right) \\
&= 1-(1-x)^{N-n+1}\big(1+(N-n+1)x\big)
\end{aligned}
$$

ce qui prouve le Lemme 2.

Démontrons maintenant la Proposition. Ceci se fera en deux temps :

1. **Borne inférieure de l'encadrement**

On cherche à résoudre $F_{n,N}(x) = \varepsilon$ avec évidemment $x < \dfrac{n}{N}$ puisque le maximum de $f_{n,N}$ est atteint en $\dfrac{n}{N}$.

On va chercher x sous la forme :

$$
x = \frac{y}{N-n+1} \text{ où } y < n.
$$

L'équation $F_{n,N}(x) = \varepsilon$ s'écrit :

$$
1 - \left(1 - \frac{y}{N-n+1}\right)^{N-n+1}(1+y) = \varepsilon
$$

ou :

$$\left(1-\frac{y}{N-n+1}\right)^{N-n+1}(1+y)=1-\varepsilon$$

Or, puisque $y<n$ et que n est très petit devant N :

$$\left(1-\frac{y}{N-n+1}\right)^{N-n+1}\approx e^{-y}$$

Au moyen d'une procédure numérique, on trouve y tel que :

$$e^{-y}(1+y)=1-\varepsilon$$

et on prend $x=\dfrac{y}{N-n+1}$.

2. Borne supérieure de l'encadrement

On cherche maintenant à trouver β tel que : $\int_{\beta}^{1} f_{n,N}(x)dx<\varepsilon$

Comme $f_{n,N}(x)<g(x)=\dfrac{(N+1)!}{(N-n)!n!}(1-x)^{N-n}$, l'inégalité ci-dessus sera satisfaite a fortiori si :

$$\int_{\beta}^{1} g(x)dx<\varepsilon$$

Or $\int_{\beta}^{1} g(x)dx=\dfrac{(N+1)!}{(N-n)!n!}\int_{\beta}^{1}(1-x)^{N-n}dx=\dfrac{(N+1)!}{(N+1-n)!n!}(1-\beta)^{N+1-n}$

On prend donc β pour que :

$$\frac{(N+1)!}{(N+1-n)!n!}(1-\beta)^{N+1-n}=\varepsilon$$

ou encore :

$$(1-\beta)^{N+1-n}=\frac{\varepsilon}{\binom{N+1}{n}}$$

Or, en utilisant la formule de Stirling :

$$\frac{N!}{n!(N-n)!} \sim \frac{N^n e^n}{n^n} \sqrt{\frac{N}{2\pi n (N-n)}}$$

Il vient :

$$(N+1-n) Log(1-\beta) = Log \frac{\varepsilon}{\binom{N+1}{n}}$$

et enfin :

$$\beta \sim \frac{1}{N+1-n} Log \frac{\binom{N+1}{n}}{\varepsilon}$$

Par exemple avec $\varepsilon = 0.05$: on trouve $y_1 = 0.355$, $y_2 = 4.74$.

Application

https://www.gendarmerie.interieur.gouv.fr/pjgn/R-D/Les-travaux-de-Recherche/Memoires/Sciences-physiques
2014

Pneumatique, identification et comparaison
Mots clefs
Traces de pneumatiques - étude morphologique - base de données

Résumé
L'objet de cette étude portait sur le perfectionnement de l'exploitation d'un système de traces de pneumatiques (relevé des voies et empattement) par l'Unité d'Expertise d'Identification Mécanique du département Véhicules, permettant ainsi à l'expert d'obtenir une liste de types de véhicules compatibles grâce à l'utilisation d'une base de données. L'étude de la morphologie de l'empreinte permet d'effectuer une comparaison avec les pneumatiques d'un véhicule suspect ou d'identifier cette dernière grâce à l'utilisation d'une base informatique interne recensant plusieurs milliers de profils de pneumatiques. L'évaluation du risque d'erreur en matière d'identification de trace a été appréciée grâce à l'outil mathématique du taux de risque, développé par Bernard BEAUZAMY.

Mémoire pour l'habilitation d'expert.