Société de Calcul Mathématique SA

Outils d'aide à la décision

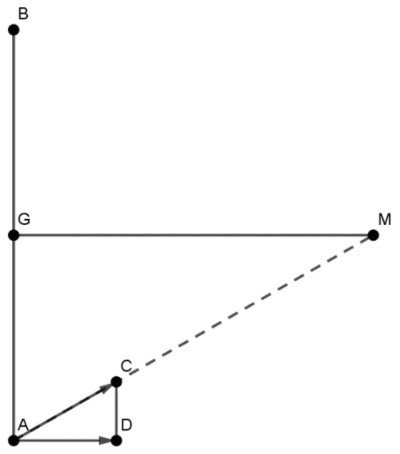
depuis 1995

Quelques remarques à propos de l'attraction newtonienne

Bernard Beauzamy

février 2023

1. Attraction newtonienne d'un solide sur un autre



On considère l'attraction d'une masse ponctuelle M sur un corps solide constitué de deux masses ponctuelles m, en $A, B,$ reliées par un tube indéformable, de masse nulle. On note D la distance de G à M et $\delta = dist(G, A) = dist(G, B)$.

La force exercée en A, dirigée vers M, vaut :

$$F_{A,M} = \frac{kmM}{D^2 + \delta^2}$$

où k est la constante universelle de gravitation.

Les triangles ADC et AGM sont semblables ; il en résulte que $\dfrac{AD}{AC} = \dfrac{GM}{AM}$.

La composante de $F_{A,M}$ parallèle à GM vaut donc :

$$f_{A,M} = \frac{kmM}{D^2 + \delta^2} \frac{D}{\sqrt{D^2 + \delta^2}} = \frac{kmMD}{\left(D^2 + \delta^2\right)^{3/2}}$$

La force totale agissant sur G est le double, soit :

$$f_{G,M} = \frac{2kmMD}{\left(D^2 + \delta^2\right)^{3/2}}.$$

On observe que cette force est différente de ce qu'elle serait si toute la masse était concentrée en G ; elle serait en effet :

$$g_{G,M} = \frac{2kmM}{D^2}$$

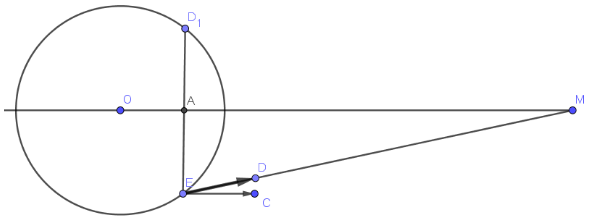
Si on éloigne les boules A, B l'une de l'autre, sans toucher à G ni M, la force $f_{G,M}$ tend vers 0 alors que la force $g_{G,M}$ ne change pas.

Il n'est donc pas licite de dire que le mouvement d'un corps (ici la tige AB) est le même si toute la masse est concentrée au centre de gravité.

2. Action d'une boule homogène sur une masse ponctuelle

Soit une boule homogène, de densité ν, de rayon R, située à distance D d'une masse ponctuelle M. On veut calculer l'attraction newtonienne de l'une sur l'autre. On note k la constante universelle de gravitation.

On va commencer par calculer l'attraction newtonienne de M sur un disque de rayon λ, situé à distance D de M ; on représente le disque en coordonnées polaires. La force agissant sur un élément de surface $d\rho d\vartheta$ sera $F = k\nu M \frac{\rho d\rho d\vartheta}{\rho^2 + D^2}$, orientée vers M. Or les triangles AEM et ECD sont semblables ; donc :



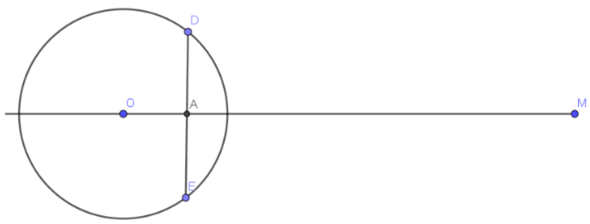
$$\frac{EC}{ED} = \frac{AM}{EM} = \frac{D}{\sqrt{D^2 + \rho^2}}$$

La composante F_1 de F, parallèle à l'axe, vaut donc :

$$F_1 = F \frac{D}{\sqrt{D^2 + \rho^2}} = k\nu M \frac{\rho D}{\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}} d\rho d\vartheta$$

$$F_A = k\nu M d \int_{\rho=0}^{\lambda} \int_{\vartheta=-\pi}^{\pi} \frac{\rho d\rho d\vartheta}{\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}} = 2\pi k\nu M D \int_{\rho=0}^{\lambda} \frac{\rho d\rho}{\left(\rho^2 + D^2\right)^{3/2}} = 2\pi k\nu M \frac{\sqrt{\lambda^2 + D^2} - D}{\sqrt{\lambda^2 + D^2}}$$

On observe que cette formule fait intervenir la taille du disque ; la force n'est donc pas la même que si toute la masse était concentrée au centre de gravité, A.



Ensuite, soit DE un disque perpendiculaire à l'axe OM, avec $OA = x$, $-R \le x \le R$. Le rayon du disque est $\lambda = \sqrt{R^2 - x^2}$; la distance du disque à M est $d = D - x$; l'attraction de M sur ce disque est :

$$F_A(x) = 2\pi k\nu M \frac{\sqrt{R^2 - x^2 + (D-x)^2} - (D-x)}{\sqrt{R^2 - x^2 + (D-x)^2}} = 2\pi k\nu M \frac{\sqrt{R^2 - 2Dx + D^2} - (D-x)}{\sqrt{R^2 - 2Dx + D^2}}$$

et l'attraction totale de M sur la boule sera :

$$F = \int_{-R}^{R} F_A(x)\,dx = \int_{-R}^{R} F_A(x)\,dx = 2\pi k\nu M \int_{-R}^{R} \frac{\sqrt{R^2 - 2Dx + D^2} - (D-x)}{\sqrt{R^2 - 2Dx + D^2}}\,dx$$

L'intégrale vaut :

$$I = \frac{2R^3}{3D^2}$$

D'où :

$$F = 4\pi k\nu M \frac{R^3}{3D^2}$$

Nous avons obtenu :

Proposition. – *La force d'attraction d'une masse ponctuelle de masse M sur une boule homogène de densité ν, de rayon R, située à distance D est :*

$$F = 4\pi k\nu M \frac{R^3}{3D^2}$$

Ceci est équivalent à une masse ponctuelle, située en G, centre de gravité de la boule, et de masse :

$$m_G = \frac{4\pi R^3 \nu}{3}$$

3. Interaction entre deux boules

On dispose de deux boules, de diamètres et de masses différents. Fixons un élément de volume V_2 dans B_2. D'après ce qui précède, l'attraction sur V_2 est la même que si toute la masse de B_1 était concentrée au centre de gravité, G_1. Concentrons donc toute la masse de B_1 en G_1 ; à nouveau d'après ce qui précède, l'attraction sur B_2 est la même que si toute la masse était concentrée en B_2. Conclusion : pour des boules, on peut toujours supposer que toute la masse est au centre de gravité.

4. Mouvement relatif de deux masses

On dispose de deux masses ponctuelles m_1, m_2 immobiles, situées à distance D l'une de l'autre. Chacune est soumise à l'attraction newtonienne :

$$F = \frac{k\, m_1 m_2}{D^2}$$

On veut déterminer le moment où les deux masses se rejoignent. L'axe des x est porté par le segment joignant les deux masses ; l'origine est prise au centre de gravité. Celui-ci est immobile, puisque le système est isolé. On note $d_1 < 0, d_2 > 0$ les abscisses au temps $t = 0,$ si bien que $d_2 - d_1 = D$. On pose $d_1 = \lambda d_2$ avec $\lambda < 0.$ On note $x_1(t), x_2(t)$ les abscisses à un moment quelconque ; on a $x_1(t) = \lambda x_2(t)$ à tout instant, puisque le barycentre est immobile. Le coefficient λ vérifie :

$$\lambda d_2 m_1 + d_2 m_2 = 0,\ \lambda = -\frac{m_2}{m_1} = \frac{d_1}{d_2},\ 1-\lambda = \frac{m_1+m_2}{m_1},\ D = d_2 - d_1 = (1-\lambda) d_2 = \frac{m_1+m_2}{m_1} d_2 .$$

Chacune des masses est soumise à l'attraction newtonienne :

$$F_1 = \frac{k m_1 m_2}{(x_2 - x_1)^2} = \frac{k m_1 m_2}{(1-\lambda)^2 x_2^2},\ F_2 = -\frac{k m_1 m_2}{(x_2 - x_1)^2} = -\frac{k m_1 m_2}{(1-\lambda)^2 x_2^2}$$

Cette force est dirigée selon l'axe des $x,$ orientée vers la droite pour $M_1,$ vers la gauche pour $M_2.$ Pour M_1, on a $F_1 = m_1 \gamma_1$ avec $\gamma_1 = \frac{k m_2}{(1-\lambda)^2 x_2^2}$, orientée positivement ; pour M_2, $F_2 = m_2 \gamma_2$ avec $\gamma_2 = -\frac{k m_1}{(1-\lambda)^2 x_2^2}$, orientée négativement. On peut écrire :

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{k m_1}{(1-\lambda)^2 x_2^2}$$

Donc, en notant $v_1(t), v_2(t)$ la vitesse des mobiles à l'instant t :

$$\frac{dv_2}{dt} = -\frac{k m_1}{(1-\lambda)^2 x_2^2}$$

et donc :

$$\frac{dv_2}{dt}v_2 = -\frac{km_1}{(1-\lambda)^2 x_2^2}\frac{dx_2}{dt}$$

En intégrant ceci :

$$\frac{1}{2}v_2^2 = \frac{km_1}{(1-\lambda)^2 x_2} + C$$

où C est une constante à déterminer.

A l'instant 0, $x_2 = d_2$ et $v_2 = 0$, donc :

$$C = -\frac{km_1}{(1-\lambda)^2 d_2}$$

On obtient finalement l'équation différentielle :

$$\frac{1}{2}v_2^2 = \frac{km_1}{(1-\lambda)^2}\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{d_2}\right)$$

On a $v_2 < 0$ et $1-\lambda = \frac{m_1 + m_2}{m_1}$; on peut écrire ceci sous la forme :

$$v_2 = -\sqrt{\frac{2km_1^3}{(m_1+m_2)^2}}\sqrt{\frac{1}{x_2} - \frac{1}{d_2}}$$

On veut représenter le temps t comme fonction de l'abscisse x_2 ; pour $x_2 = d_2$ on a $t = 0.$ On note $t = \varphi(x)$ cette fonction. On a, d'après la règle de dérivation d'une fonction inverse :

$$\varphi'(x_2) = \frac{1}{x_2'(t)} = \frac{1}{v_2(t)} = \frac{-(m_1+m_2)}{\sqrt{2km_1^3}}\sqrt{\frac{x_2 d_2}{d_2 - x_2}} = \frac{-(m_1+m_2)\sqrt{d_2}}{\sqrt{2km_1^3}}\sqrt{\frac{\frac{x_2}{d_2}}{1-\frac{x_2}{d_2}}}$$

Notons $F(x)$ la primitive de $\sqrt{\frac{x}{1-x}}$ nulle en 0 ; on a :

$$\varphi(x_2)-\varphi(0)=\int_0^{x_2}\varphi'(x)\,dx=\frac{-(m_1+m_2)\sqrt{d_2}}{\sqrt{2km_1^3}}\int_0^{x_2}\sqrt{\frac{\frac{x_2}{d_2}}{1-\frac{x_2}{d_2}}}dx_2$$

$$=\frac{-(m_1+m_2)d_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2km_1^3}}\int_0^{x_2/d_2}\sqrt{\frac{u}{1-u}}du=\frac{-(m_1+m_2)d_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2km_1^3}}F\left(\frac{x_2}{d_2}\right)$$

On sait que :

$$F(x)=\frac{\pi}{2}-\sqrt{x(1-x)}-\arcsin\sqrt{1-x}$$

Et donc, pour tout d, $0\le d\le D$:

$$\varphi(d_2)-\varphi(0)=\int_0^{d_2}\varphi'(x)\,dx=\frac{-(m_1+m_2)d_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2km_1^3}}\left(\sqrt{\frac{x_2}{d_2}\left(1-\frac{x_2}{d_2}\right)}+\arcsin\sqrt{1-\frac{x_2}{d_2}}-\frac{\pi}{2}\right)$$

et puisque $\varphi(d_2)=0$:

$$\varphi(0)=\frac{(m_1+m_2)d_2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2km_1^3}}\frac{\pi}{2}=\frac{(m_1+m_2)}{\sqrt{2k}}\frac{\pi}{2}\left(\frac{d_2}{m_1}\right)^{3/2}$$

ce qui s'écrit finalement :

$$\varphi(0)=\frac{m_1+m_2}{\sqrt{2k}}\frac{\pi}{2}\left(\frac{d_2}{m_1}\right)^{3/2}$$

C'est le temps total avant rencontre des deux masses. Comme $\dfrac{d_1}{m_2}=-\dfrac{d_2}{m_1}$, le résultat est identique si on permute les deux masses. Utilisant l'expression $D=\dfrac{m_1+m_2}{m_1}d_2$, ou $\dfrac{D}{m_1+m_2}=\dfrac{d_2}{m_1}$, on obtient :

Proposition. – *Les deux masses se rejoignent au temps T donné par :*

$$T=\frac{D^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2k(m_1+m_2)}}\frac{\pi}{2}$$

où $k = 6,674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation.

Le temps T dépend de la masse totale $m_1 + m_2$, alors que la force dépend du produit $m_1 m_2$.

Remarques complémentaires. – La formule $F = \frac{k m_1 m_2}{D^2}$ présente une "singularité" lorsque $D = 0$: la force devient infinie lorsque les deux masses sont proches, ce qui est évidemment absurde en pratique.

Cette formule ne fait intervenir que les masses, non les volumes ou les surfaces. Elle ne se prête donc pas à l'interprétation en termes d'ondes gravitationnelles.