LES MATHÉMATIQUES AU SERVICE DES DÉCIDEURS

Bernard Beauzamy

Même si les éclipses du dollar sont plus difficiles à prévoir que celles de la Lune, le rapprochement entre mathématiques théoriques et mathématiques appliquées permet la mise au point de modèles qui, pour les dirigeants d'entreprise, constituent des aides à la décision dans les domaines les plus divers.

La notion de *modèle mathématique* associé à un phénomène (physique ou autre) est assez nouvelle, et de ce fait n'est pas toujours bien comprise. Bien des gens, les ingénieurs et les spécialistes d'autres sciences inclus, imaginent mal en quoi des mathématiques, autres qu'élémentaires, peuvent intervenir pour les aider à mieux décrire, à mieux comprendre, à mieux prédire les phénomènes qu'ils peuvent rencontrer. Nous allons donc tenter d'expliquer ce qu'est un modèle, de montrer quel bénéfice on en peut retirer, mais aussi quelles en sont les contraintes et les limites.

Un phénomène, qu'il soit physique, chimique, économique, monétaire, social ou autre, est décrit par un certain nombre de règles, de lois. Dans certains cas, ces lois sont assez bien connues, dans d'autres elles sont presque complètement mystérieuses. Par exemple, si l'on désire envoyer une fusée vers la Lune, on prend en compte l'attraction des diverses planètes et celle du Soleil, qui sont exprimées par la loi de Newton, avec éventuellement

---

■ *Bernard Beauzamy, 41 ans, ancien élève de l'Ecole polytechnique, est directeur de l'Institut de calcul mathématique à l'université de Paris-VII.*

une correction relativiste. Ces lois sont bien connues sur le plan théorique. De même, dans le cas de certaines réactions chimiques, on sait avec précision qu'en mettant tels corps en présence, tels autres seront produits, et telle qualité d'énergie sera absorbée ou libérée. Mieux, même, on sait expliquer les raisons de ces phénomènes au moyen d'une théorie, qui dira par exemple que des liaisons se sont produites entre tels atomes, et que tels électrons se sont déplacés.

A l'inverse, les phénomènes économiques ou monétaires ne sont pas aussi bien compris. On ne sait pas décrire convenablement (c'est-à-dire de manière à permettre une *prédiction*) l'évolution de l'économie d'un pays, ou celle des marchés financiers. On possède assurément un certain nombre de règles, de recettes, mais elles sont insuffisantes pour décrire les phénomènes sous tous leurs aspects. On peut d'ailleurs dire, globalement, que les sciences humaines sont très en retard sur celles de la nature.

Le comportement des marchés monétaires est un exemple typique où le modèle est imparfait, voire inexistant : plusieurs théories s'affrontent, et aucune ne permet de prédire avec certitude. L'évolution des taux de change, celle des cours de la Bourse, sont souvent imprévisibles, ce qui signifie simplement que les lois qui les gouvernent – leur modèle mathématique – ne sont pas convenablement connues.

Les mathématiques permettent d'interpréter un très grand nombre de données expérimentales

Lorsque les règles qui régissent le phénomène sont trop incomplètes, elles ne permettent guère d'en décrire l'évolution. Le mathématicien peut aider à les préciser, en coopérant avec les spécialistes de la discipline. Eux fourniront les données expérimentales, et lui tentera de les interpréter, de découvrir la raison profonde des événements.

Certaines méthodes mathématiques, notamment statistiques (par exemple, l'analyse factorielle) permettent d'aider à l'interprétation de données expérimentales très nombreuses. Bien souvent, en effet, il est assez facile d'obtenir des données numériques, et le vrai problème est de savoir les interpréter. Imaginons, par exemple, un industriel qui, soucieux de connaître le goût du public à l'égard des dix produits qu'il fabrique, fait procéder chaque mois à une petite enquête, auprès de dix personnes, dans chacun des cent magasins où les produits sont vendus. Il se retrouvera, à la fin de l'année, avec 120 000 données à dépouiller.

A partir des données expérimentales, le mathématicien peut donc aider à discerner les règles qui régissent le phénomène : c'est une tâche de *conception*. Une fois celle-ci menée à bien, il est certes nécessaire de tester la validité des hypothèses faites, de soumettre le modèle à l'épreuve de l'expérience, mais, s'il y résiste, il permet de prédire l'évolution dans le futur, et ce à partir de données numériques infiniment moins nombreuses que celles qui ont été nécessaires pour l'établir.

La conception de modèles exige des mathématiciens de très haut niveau

La contribution du mathématicien à cette conception est réellement essentielle, en ce sens que les spécialistes de la discipline, même s'ils ont l'intuition des phénomènes auxquels ils sont confrontés, ne possèdent pas le bagage mathématique nécessaire pour formaliser, pour modéliser cette intuition. On cite souvent le cas d'Albert Einstein, qui, pour mettre au point la théorie de la relativité généralisée, eut recours aux services du mathématicien Elie Cartan.

Cet exemple est loin d'être extrême: les modèles actuels d'évolution des cours de la Bourse font appel à des processus stochastiques, chaînes de Makov, mouvement brownien et autres outils probabilistes hautement élaborés. C'est une constatation absolument générale: tous les modèles que l'on rencontre sont d'une extrême sophistication; leur conception requiert des années d'expérience dans la recherche mathématique, et des connaissances sans commune mesure avec celles que possède un ingénieur à sa sortie d'une grande école.

Cette tâche de conception n'est cependant pas la plus fréquente. Dans bien des cas, heureusement, le modèle existe et donne satisfaction (ou l'on s'en satisfait, ce qui est moins bien). Mais même lorsque les règles physiques qui décrivent un phénomène sont bien connues, il reste à savoir les exploiter: c'est là que le mathématicien est indispensable.

Commençons par un exemple très simple. Imaginons une compagnie d'aviation, qui dispose d'un certain nombre d'appareils. Ceux-ci desservent des destinations parfaitement déterminées, selon un rythme préétabli. Les équipages, eux aussi, obéissent à des règles fixes: durée des vols, temps de repos hebdomadaire, nombre de jours de vacances (il y a cependant une part d'incertitude, due, pour les appareils, aux pannes, et, pour les équipages, aux maladies, mais les unes comme les autres ont des fréquences et des durées statistiquement prévisibles). Le problème est, pour la compagnie, d'établir les horaires de chaque équipage, en respectant les repos, mais de manière à assurer tous les vols.

Un tel problème s'appelle, en mathématique, une optimisation avec contraintes, et se rencontre dans des situations extrêmement variées. Il est très complexe, bien que les données soient parfaitement connues, dès que leur nombre est élevé, et l'on conçoit aisément qu'en pareil cas le recours à des outils mathématiques élaborés soit nécessaire. Ceux-ci existent sur deux plans: théorique, d'une part, lorsqu'on peut affirmer que, sous certaines conditions, une solution optimale existe, et pratique, d'autre part, lorsqu'on dispose de méthodes (elles s'appellent des *algorithmes*) permettant de déterminer explicitement une solution satisfaisante. Parmi ces algorithmes, le plus fréquemment rencontré jusqu'à un passé récent était l'algorithme du simplexe, mais d'autres sont apparus, qui permettent d'obtenir plus rapidement des solutions dans le cas de systèmes dépendant d'un très grand nombre de variables.

Des problèmes apparemment simples ne peuvent être résolus que grâce à des outils mathématiques compliqués

Passons à un autre exemple, où les règles sont moins nombreuses mais mathématiquement plus délicates. Imaginons un commandant de navire qui cherche à rejoindre son port d'attache. Il gouverne en droite ligne, du moins s'il ne rencontre aucun autre vaisseau. Lorsque c'est le cas, il dévie pour l'éviter. Mais imaginons encore qu'il soit dans une zone encombrée: cinq ou six navires sont visibles. Pour chacun d'eux, grâce à ses moyens de détection, il connaît parfaitement la position et la vitesse. Il manœuvrera donc pour les éviter. Mais, en même temps, il désire évidemment ne pas s'éloigner trop de sa route d'origine. Il y a donc, là encore, un problème d'optimisation, simple à décrire, mais nullement à résoudre.

Un dernier exemple, encore plus simple à décrire, encore plus difficile à résoudre, est celui du jeu d'échecs. Les règles, ici, sont parfaitement connues, puisqu'elles sont d'invention humaine. Cependant, il n'existe pas de modèle satisfaisant: les meilleurs joueurs se fondent sur leur expérience et leur intuition, et ne sont pas encore battus par les procédés d'analyse automatique auxquels ont recours les ordinateurs. Cette analyse existe, mais elle n'est pas encore satisfaisante. Le problème à résoudre est celui de l'évaluation de chaque situation. Telle pièce n'a pas la même valeur dans tel cas et dans tel autre; un pion est plus important en fin de partie qu'au début, et pas de la même façon. Si cette évaluation pouvait être faite correctement, la solution serait aisée à obtenir, puisque la décision ne porte que sur un très petit nombre de données (les pièces: au plus trente-deux ; les cases de l'échiquier: soixante-quatre).

Disons-le avec ironie: ce dernier exemple est peut-être de nature à jeter le discrédit sur l'efficacité des modèles que les mathématiciens proposent. On peut en effet à bon droit s'interroger: s'ils ne parviennent pas à décrire correctement le comportement de trente-deux pièces sur soixante-quatre cases, à quels succès peut-on s'attendre en des situations plus complexes? Mais les mathématiques savent prédire les éclipses de la Lune, même si elles restent impuissantes devant celles du dollar.

Des problèmes d'énoncé très simple, nous l'avons vu, requièrent pour leur solution des outils mathématiques élaborés. Examinons donc maintenant si cette solution est satisfaisante, partiellement ou totalement.

Solution optimale et solution satisfaisante

Reprenons certains de nos exemples précédents, tout d'abord celui de la fusée. Le modèle mathématique qui régit la trajectoire est parfaitement connu, nous l'avons vu, en ce sens que les équations du mouvement sont simples à écrire. Le problème est qu'on ne sait pas résoudre ces équations, et qu'on ne peut donc pas prédire avec certitude quel sera le mouvement de la fusée. On est donc conduit à chercher, au lieu de la solution théorique parfaite qu'on est incapable d'obtenir, des solutions numériques approchées. Le problème se pose alors: ces solutions numériques reflètent-elles une bonne approximation, ou une mauvaise? La question n'est pas simple, et il est prudent de prévoir qu'on aura besoin, en agissant sur les moteurs au cours du vol, de corriger la trajectoire, si d'aventure elle s'écarte trop de ce qui avait été calculé.

La compagnie d'aviation ou le commandant de navire nous fournissent aussi des illustrations de la puissance, mais aussi des limites, de l'outil mathématique. La théorie, en effet, fournit souvent, sous certaines hypothèses, des théorèmes d'existence (le problème proposé a une ou plusieurs solutions) et parfois d'unicité (le problème proposé admet une solution unique). Mais bien souvent ces énoncés ne permettent pas de la calculer, et de ce fait ne répondent pas à l'attente de la compagnie ou du commandant de navire, qui veulent une réponse concrète. Ceux-ci, cependant, ont une exigence de nature un peu différente: ils ne recherchent pas *la* solution optimale, ils veulent *une* solution satisfaisante.

On est donc amené, là encore, à rechercher des algorithmes numériques: des moyens de calcul qui permettent de parvenir à une solution «à peu près» convenable, étant entendu que d'autres études (ou la pratique) doivent permettre de déterminer dans quelle mesure cette solution est réellement satisfaisante. C'est souvent, en pareil cas, l'empirisme qui prévaut: une solution est jugée satisfaisante tant qu'on n'a pas trouvé mieux, ou, plus exactement, tant qu'on estime que la mise en place d'une solution plus élaborée coûterait plus qu'elle ne rapporterait.

L'outil mathématique n'est donc ni inutile ni tout-puissant. Les limitations actuelles montrent les directions dans lesquelles la recherche se poursuit : celle-ci est extrêmement dynamique, tant sur le plan théorique que sur le plan pratique.

Gérer de manière optimale les contraintes qui régissent un système

Sur le plan théorique, on a vu l'apparition de nouvelles branches des mathématiques, directement inspirées des besoins exprimés par les utilisateurs. Citons en particulier les *mathématiques de la décision,* qui, comme leur nom l'indique, sont des aides à la décision : elles ont pour but de quantifier un système complexe, d'évaluer l'importance des différents paramètres, et de proposer une gestion (si possible optimale) des différentes contraintes qui régissent le système. Celui-ci peut être technique : quelles quantités de produits faut-ils employer ? Economique : comment répartir recettes et dépenses ? Humain : quel nombre d'employés, quelle durée pour leur travail ?

Les mathématiques de la décision sont une partie d'un ensemble plus vaste, appelé *contrôle optimal,* qui se retrouve évidemment dans de nombreux problèmes de nature ou d'inspiration industrielle. Outre les exemples déjà cités, mentionnons celui, bien connu des mathématiciens, du « voyageur de commerce ». Le voyageur a un certain nombre de clients et veut leur rendre visite. Il souhaite optimiser ses trajets selon certains critères : par exemple, parcourir le moins de chemin possible, ou bien conduire le moins longtemps possible (ce n'est pas la même chose : certains itinéraires sont plus longs, mais plus rapides), ou bien tenir compte d'autres contraintes, liées au fret. Les méthodes mathématiques d'étude d'un tel problème relèvent de la topologie et font appel aux fonctions de plusieurs variables.

Des modèles mathématiques au service de la fiabilité et de la qualité

Les modèles mathématiques trouvent leur place dans bien d'autres questions, qui ne sont plus liées aussi directement à l'optimisation d'un système. Prenons l'exemple des tests de fiabilité, ou de contrôle de la qualité. Avant de les commercialiser, un industriel qui fabrique certains produits veut s'assurer de la proportion de pièces défectueuses. Si les produits sont tous identiques et en grand nombre, des règles de statistiques élémentaires indiquent quelle proportion de produits il faut prélever (échantillon) et à partir de quelle proportion de produits défectueux dans l'échantillon l'ensemble de la fabrication sera de qualité insuffisante.

Mais imaginons un exemple de nature plus complexe : une usine fabrique de longs tubes d'acier, de plusieurs centaines de mètres. Elle veut mesurer l'excentration de chaque tube : le centre du cercle interne est-il bien le même que le centre du cercle externe? La seule façon de s'en assurer est évidemment de couper le tube. Mais ce test est destructif; de surcroît, il prend du temps (donc ralentit la chaîne de fabrication) et coûte de l'argent : on souhaite donc le faire le moins souvent possible. Ce sont les mathématiques qui diront quelle proportion de tubes il faut tester, et comment il faut les tester : faut-il faire beaucoup de sections, et donc de mesures, ou peu? Faut-il les faire côte à côte, les disperser à intervalles réguliers sur le long tube, ou les faire au hasard?

L'informatique permet de mieux utiliser les modèles complexes

Comment élaborer un modèle mathématique décrivant un système donné?

Cela demande évidemment que le système soit analysé, et que l'on sache sur quelles variables on peut agir, et comment. Le processus d'analyse comporte en général six phases.

⇒Une analyse mathématique.

⇒La construction d'un modèle mathématique approximatif, prenant en compte les aspects les plus importants.

⇒La validation du modèle, c'est-à-dire la vérification du fait qu'il décrit bien le système proposé.

⇒La recherche d'une solution satisfaisante, voire optimale.

⇒La mise en œuvre concrète de la solution retenue.

⇒La détermination d'une stratégie qui permet de vérifier le comportement du modèle après le choix de cette solution : cela permet de corriger les erreurs et d'améliorer progressivement le modèle.

Les progrès récents de l'informatique permettent d'utiliser efficacement des modèles complexes : on n'est plus obligé de se contenter de modèles rudimentaires. La résolution numérique a beaucoup progressé : des problèmes qui étaient considérés comme insolubles numériquement il y a peu d'années ne le sont plus aujourd'hui. Cela a entraîné, avec bénéfice mutuel, une interpénétration entre mathématiques théoriques et mathématiques appliquées, le fossé qui les sépare s'étant considérablement rétréci. De nouvelles branches théoriques sont apparues, qui trouvent leurs fondements dans les approches des problèmes grâce à l'ordinateur. C'est le cas de l'algorithmique, qui s'est donné pour but d'évaluer, pour le minimiser, le temps nécessaire à un ordinateur pour résoudre un problème donné, ou la complexité des calculs qu'il devra effectuer à cette fin.

L'importance des problèmes qui restent à résoudre, l'apparition de théories nouvelles, d'outils nouveaux, rendent l'époque que nous vivons tout à fait passionnante. Mais, tandis qu'aux Etats-Unis le gouvernement fédéral subventionne largement la recherche fondamentale et ses applications et que les industriels consacrent, à l'une comme aux autres, une part importante de leur budget, en France, la nécessité de concevoir, puis d'utiliser des outils scientifiques élaborés n'a pas encore complètement fait son chemin, ni auprès des hommes politiques, ni auprès des industriels ou des chefs d'entreprise. Souhaitons qu'elle y parvienne.

Bernard BEAUZAMY