Société de Calcul Mathématique SA
Outils d'aide à la décision
depuis 1995

Contrôle de la qualité : appui juridique

Laplace contre les Chinois

Bernard Beauzamy
04/10/2026

Résumé Opérationnel

Un chef d'entreprise a commandé 10 000 paires de chaussures à un fournisseur chinois ; sur la livraison, il apparaît que 100 sont défectueuses. Il se dit : voilà un bon fournisseur, taux de satisfaction 99%. Je vais passer d'autres commandes : un ou plusieurs lots de 50 000.

Et puis, en bon disciple d'Andrew Grove (ancien PDG d'Intel, auteur du livre "Seuls les paranoïaques survivent"), il se dit : "oui, mais mon fournisseur est chinois ; il a sûrement essayé de m'amadouer par une première livraison de bonne qualité ; à la seconde, je vais me retrouver avec 50% de rejets, ou pire". L'acheteur consulte un juriste, que se dit incapable de rédiger un contrat portant sur la livraison de 50 000 paires : dans n'importe quelle production industrielle, il est normal qu'une certaine proportion soit défectueuse ; rien n'est jamais parfait.

La défectuosité peut être due au hasard, mais, en général elle est due à des causes bien simples : matières premières de mauvaise qualité, mauvais réglage des process, incompétence des agents de fabrication.

Et c'est là qu'intervient une théorie mathématique due à Laplace (Pierre-Simon, Marquis de Laplace, 1812 : "Théorie analytique des probabilités"). Elle est solide et indiscutable. Elle va nous permettre de rédiger un contrat traitant tous les défauts de fabrication comme dus au hasard. Toutes les autres causes, purement déterministes, vont être mises à la charge du fabricant. C'est mauvais pour lui, mais il ne peut pas s'en rendre compte.

Spécifiquement, le contrat qui sera rédigé dira ceci :

Monsieur, nous sommes très satisfaits de votre livraison précédente, portant sur 10 000 produits, puisque 99% des produits sont d'excellente qualité. Nous vous passons commande de 50 000 paires de chaussures. Le taux de rebut précédent, de 1%, est excellent. Il conduirait à 500 paires défectueuses sur 50 000. Mais nous savons que le hasard peut intervenir : nous acceptons un maximum de 598 paires défectueuses sur 50 000, pas une de plus (soit un taux de rebut de moins de 1,2%). Si ce nombre venait à être dépassé, nous serions au regret de vous retourner, à vos frais, l'ensemble de la livraison. Croyez, Monsieur, etc.

Pour le fabricant, le contrat semble parfait, puisqu'il accepte un taux de rebut de 1.2% alors qu'il était de 1% dans la première livraison. Il donne donc l'impression d'une très grande tolérance. Mais c'est tout l'inverse : le Chinois est pris au piège, comme nous allons le voir.

En fait, il est très mauvais pour le fabricant, si chinois soit-il, parce que cela va l'obliger à éliminer toutes les causes déterministes des défauts de fabrication (matières premières défectueuses, etc.), pour n'accepter que celles qui sont vraiment dues au hasard. Sur un lot important, c'est à peu près impossible.

I. Le piège de l'indépendance

Toutes les théories mathématiques qui évaluent la probabilité d'un certain nombre de défectuosités (appelons-les ER, événements redoutés, différents selon les contextes) font l'hypothèse d'une indépendance d'une production à l'autre : les aléas qui peuvent affecter la production de la $44^{ème}$ paire de chaussure sont indépendants de ceux qui ont affecté la production de la $43^{ème}$. En pratique, c'est évidemment faux : il y a des causes communes, vues plus haut.

Donc, si on fait une hypothèse d'indépendance, on est optimiste : on néglige les causes communes. Dans certains cas, on ne peut pas faire autrement : si vous recevez un container avec dedans 10 000 paires de chaussures, dont 100 défectueuses, vous n'avez aucun moyen d'évaluer les causes de mauvaise qualité.

En revanche, si les chaussures portent une étiquette avec le matériau, le lieu de fabrication, la date, etc., vous disposez d'informations qui vous permettront de savoir où se situent surtout les productions de mauvaise qualité.

La SNCF cherche à évaluer les risques qui peuvent affecter les projets, du point de vue des budgets et du point de vue des délais. Elle considère que chaque projet a plusieurs phases et traite chaque phase comme indépendante, ce qui est évidemment erroné : un retard sur une phase se répercute sur les suivantes.

Retenons bien ceci : une hypothèse d'indépendance relève du dogme académique ; elle n'est jamais satisfaite dans la réalité. Lorsque nous rédigeons un contrat pour notre Chinois, nous faisons semblant de croire que les défauts de fabrication sont dus au hasard et qu'il n'y rentre aucune cause déterministe maligne. Et on lui souhaite bien du plaisir, parce que sur un lot plus gros, les causes déterministes vont se manifester à plein. Chaque industriel sait qu'il n'est pas aussi facile de respecter la qualité sur un gros lot que sur un petit.

II. La théorie de Laplace

Elle est détaillée dans notre livre [MPPR], chapitre 14 ; elle est conséquence de la théorie des taux de risque. La formule précise que nous employons pour le Chinois est :

Si on a rencontré n objets défectueux sur N essais, la probabilité d'avoir n' objets défectueux sur N' est donnée par la formule :

$$p(n',N';\ n,N)=\frac{N+1}{N+N'+1}\frac{\binom{N'}{n'}\binom{N}{n}}{\binom{N+N'}{n+n'}},$$

où $\binom{N}{n}=\frac{N!}{(N-n)!n!}$ désigne le coefficient du binôme. Bien entendu, cette formule requiert l'indépendance des évaluations, d'un essai à l'autre.

Dans le cas présent, pour répondre à notre Chinois, nous avons simplement vérifié que :

$$\sum_{n'=0}^{598} p(n',50000;\ 100,10000)=\frac{10000+1}{10000+50000+1}\binom{10000}{100}\sum_{n'=0}^{598}\frac{\binom{50000}{n'}}{\binom{10000+50000}{100+n'}}\approx 0.95\,.$$

III. La notion de taux de risque

Pour ceux qui aiment comprendre, la formule ci-dessus résulte de la théorie générale de taux de risque, développée par Laplace.

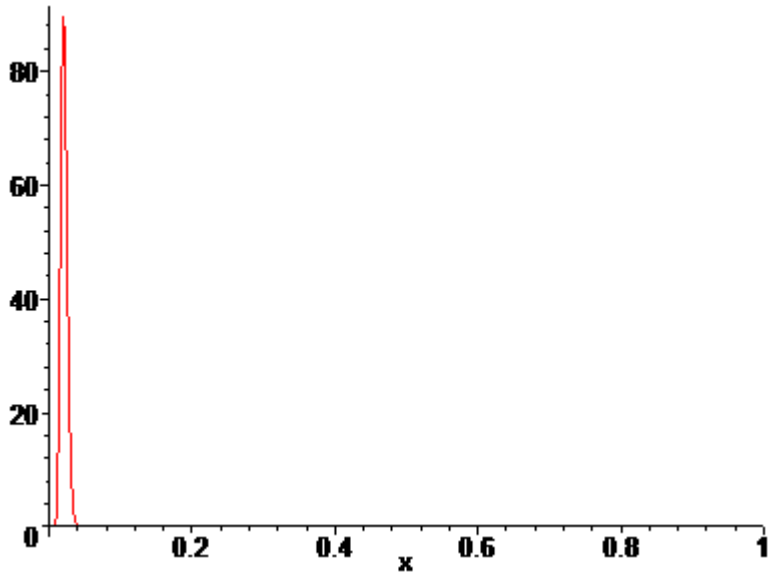
On fait N essais, et sur ces N essais, n se révèlent défectueux, soit une proportion de $\frac{n}{N}$. On est tenté de penser que cette proportion sera conservée dans toute expérience ultérieure : si on fait N' essais, le nombre de résultats défectueux serait de $\frac{n}{N}N'$. En fait, il n'y a aucune raison qu'il en soit ainsi, et que la proportion du nombre de produits défectueux soit toujours la même. A l'inverse, il est certain que l'expérience "n défectueux sur N" nous donne une indication. Si par exemple il y en a eu 20 sur 1000, on ne s'attend pas, sur 1000 essais ultérieurs, à ce qu'il y en ait 2 seulement, ni à ce qu'il y en ait 500.

On est donc amené à considérer que la probabilité qu'un objet soit défectueux est inconnue, mais qu'on dispose d'une information préalable. Si on note λ cette probabilité (inconnue), on est donc amené à la considérer comme une variable aléatoire. La théorie de Laplace ("Théorie Analytique des Probabilités") dit que, si on a n défectueux sur N essais, la densité de probabilité de cette variable aléatoire est donnée par la formule (voir [MPPR]) :

$f_{n,N}(x)=C\,x^n(1-x)^{N-n}$, avec $C=\frac{(N+1)!}{n!(N-n)!}$.

Il est facile de démontrer que l'espérance vaut $\mu=\frac{n+1}{N+2}$ et que la variance vaut $\sigma^2=\frac{(n+1)(N-n+1)}{(N+2)^2(N+3)}$.

La fonction $f_{n,N}$ est positive, définie sur l'intervalle $[0,1]$, d'intégrale 1 (c'est une densité de probabilité) ; elle prend son maximum en $\frac{n}{N}$ (ce qui conforte l'intuition : c'est la valeur la plus probable pour le risque). Voici l'aspect du graphe, pour $n=20, N=1000$:



La fonction prend des valeurs très élevées au voisinage de $x=\frac{n}{N}$ et des valeurs très petites ailleurs. C'est presque une "masse de Dirac" (fonction d'intégrale 1, nulle sauf en un point, où elle prend une valeur infinie).

On en déduit un résultat étonnant : s'il n'y eu aucun ER sur N essais, la probabilité que l'essai suivant donne un ER n'est pas nulle, mais vaut $p=\frac{1}{N+2}$.

IV. Laplace

Il aimait bien irriter ses contemporains. En application de la formule ci-dessus, il a calculé la probabilité que le Soleil se lève demain, sachant qu'il s'était constamment levé depuis la plus ancienne époque de l'Histoire, estimée à cinq mille ans ou à 1 826 313 jours. Il trouve :

$$P\left(\textit{Soleil se lève demain}\right)=\frac{N+1}{N+2} \text{ avec } N=1\,826\,313.$$

[Avec de tels propos, on se met à dos quiconque a une éducation religieuse, de quelque nature qu'elle soit.]

Il dit par ailleurs : "Nous sommes si éloignés de connaître tous les agents de la nature, et leurs divers modes d'action qu'il ne serait pas philosophique de nier les phénomènes, uniquement parce qu'ils sont inexplicables dans l'état actuel de nos connaissances. Seulement, nous devons les examiner avec une attention d'autant plus scrupuleuse, qu'il paraît plus difficile de les

admettre ; et c'est ici que le calcul des probabilités devient indispensable, pour déterminer jusqu'à quel point il faut multiplier les observations ou les expériences, afin d'obtenir en faveur des agents qu'elles indiquent, une probabilité supérieure aux raisons que l'on peut avoir d'ailleurs, de ne pas les admettre."

[Vouloir faire intervenir le calcul des probabilités pour l'aide à la décision est aujourd'hui totalement impensable : chacun a des convictions.]

Comme le citoyen Laplace présentait au général Bonaparte la première édition de son Exposition du Système du Monde, le général lui dit : "Newton a parlé de Dieu dans son livre. J'ai déjà parcouru le vôtre et je n'y ai pas trouvé ce nom une seule fois." À quoi Laplace a répondu : "Citoyen premier Consul, je n'ai pas eu besoin de cette hypothèse."

[Vouloir se limiter aux données et aux faits est aujourd'hui totalement impensable.]

Laplace était un déterministe convaincu ; il écrit :

"Une intelligence qui, à un instant donné, connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée, la position respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers, et ceux du plus léger atome. Rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir comme le passé seraient présents à ses yeux".

On aurait envie de contredire Laplace : une pièce de monnaie peut tomber sur P ou F, et même un être qui connaîtrait tous les atomes de l'Univers ne pourrait pas décider sur quelle face elle tombe. Le problème est qu'on ne sait pas aujourd'hui réaliser de système donnant 0 ou 1, proba 1/2, indépendance à chaque réalisation. On pense qu'on peut réaliser un tel système à partir de la mécanique quantique : à cette échelle, la Nature serait fondamentalement probabiliste. Mais comme on ne comprend rien à la mécanique quantique, cette affirmation est l'objet de débats.

V. Bibliographie

Pierre Simon de Laplace : *Théorie analytique des probabilités, 1812*

Bernard Beauzamy : *Méthodes Probabilistes pour l'étude des phénomènes réels,*
Editions de la SCM, Seconde Edition, juin 2016.
https://www.scmsa.eu/livres/SCM_MVL_order.htm

Annexe :

Mode de calcul de la formule :

$$p(n',N';\ n,N)=\frac{N+1}{N+N'+1}\frac{\binom{N'}{n'}\binom{N}{n}}{\binom{N+N'}{n+n'}}$$

Comme expliqué plus haut, on a une somme à calculer, ici :

$$\sum_{k=0}^{598}\ p(k,50000;\ 100,10000)$$

La somme s'écrit donc :

$$\sum_{k=0}^{K}\ p(k,N';\ n,N)=\frac{N+1}{N+N'+1}\binom{N}{n}\sum_{k=0}^{K}\ \frac{\binom{N'}{k}}{\binom{N+N'}{n+k}}$$

où K est le nombre maximum de produits défectueux que l'on est disposé à accepter.

Calcul du terme fixe $\binom{N}{n}=\frac{N!}{(N-n)!n!}=\frac{N(N-1)\cdots(N-n+1)}{n(n-1)\cdots 1}=\prod_{j=1}^{n}\ \frac{N-j+1}{j}$

Pour calculer ceci, on prendra le logarithme :

$$\binom{N}{n}=\exp\left(\sum_{j=1}^{n}\ Log(N-j+1)-Log(j)\right)$$

Calcul du terme variable $\frac{\binom{N'}{k}}{\binom{N+N'}{n+k}}=\frac{N'!}{(N'-k)!k!}\frac{(N+N'-n-k)!(n+k)!}{(N+N')!}$

Le terme $\frac{N'!}{(N+N')!}$ se met en dehors de la somme et se calcule comme précédemment.

Reste à calculer :

$$p_k = \frac{(N-n+N'-k)!(n+k)!}{(N'-k)!k!} = \prod_{j=1}^{N-n} (N'-k+j) \prod_{j=1}^{n} (k+j)$$

On peut calculer ceci en passant aux logarithmes, comme précédemment. On peut aussi calculer par récurrence :

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} = \frac{(N-n+N'-k)!(n+k)!}{(N'-k)!k!} \frac{(N'-(k-1))!(k-1)!}{(N-n+N'-(k-1))!(n+k-1)!}$$

et donc :

$$p_k = \frac{n+k}{k} \frac{N'-k+1}{N-n+N'-k+1} p_{k-1} .$$