Société de Calcul Mathématique SA

Outils d'aide à la décision

depuis 1995

Attraction Newtonienne entre deux masses au repos

Une anomalie dans la loi de Newton de l'attraction universelle

Bernard Beauzamy, 20/03/2026

1. Résumé

La loi de Newton exprimant l'attraction universelle est communément utilisée en complément quantitatif des lois de Kepler, en particulier pour les satellites et la détermination des trajectoires des fusées de toute nature. Pourtant, quand on veut l'appliquer à la situation très simple, parfaitement naturelle et parfaitement licite, de deux masses au repos, attirées l'une vers l'autre, on obtient des résultats présentant manifestement des anomalies. Le temps de rapprochement des deux masses ne tend pas vers 0, même si l'une des deux masses devient très faible. Mais ce paradoxe n'est qu'apparent, comme nous l'expliquons plus loin.

2. Présentation du problème

On dispose de deux masses ponctuelles M_1, M_2, immobiles, situées à distance D l'une de l'autre. Chacune est soumise à l'attraction newtonienne :

$$F = \frac{G\, m_1 m_2}{D^2},$$

où $G = 6,674 \times 10^{-11}\, m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation.

Nous établissons le résultat suivant, qui semble très étrange :

Théorème – Si $m_1 > 0$ et $m_2 > 0$, l*es deux masses se rejoignent au temps* T_{final} *donné par :*

$$T_{final} = \frac{\pi}{2\sqrt{2G}} \frac{D^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2}}.$$

Ce résultat est étrange à deux titres :

Il fait intervenir la somme des masses, alors que la force faisait intervenir le produit ;

Le temps n'est pas infini, même si l'une des masses est très petite, alors qu'en toute logique, si l'une des masses est nulle, il n'y a plus d'attraction et les masses ne se rapprochent plus.

La formule de l'attraction universelle est étrange à plusieurs titres. Si $m_1 > 0,$ la masse M_1, du fait de l'attraction par M_2, est soumise à une accélération :

$$\gamma_1 = \frac{G\, m_2}{D^2},$$

puisque $F = \dfrac{G m_1 m_2}{D^2} = m_1 \gamma_1$.

Cette expression ne fait pas intervenir la masse $m_1,$ pourvu qu'elle soit > 0. Si $m_1 = 0,$ $F = 0$ et γ_1 n'est pas définie.

3. Mise en équations

L'axe des x est porté par le segment joignant les deux masses ; l'origine O est prise au centre de gravité. Celui-ci est immobile, puisque le système est isolé.

Proposition 1. - *Le mouvement de la masse M_2 est le même que si elle était soumise à l'attraction d'une masse $\mu = \dfrac{m_1^3}{\left(m_1 + m_2\right)^2}$ située au centre de gravité.*

Démonstration

Une masse μ au centre de gravité exercera l'attraction :

$$F_O = \frac{G\, \mu\, m_2}{d_2^2}.$$

Les deux forces sont égales si :

$$\mu = \frac{m_1 d_2^2}{\left(d_1 + d_2\right)^2} \quad (1)$$

Par définition du centre de gravité :

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \text{ ou } d_1 = \frac{m_2}{m_1} d_2 .$$

En reportant dans (1), on obtient :

$$\mu = \frac{m_1}{\left(\dfrac{m_2}{m_1} + 1\right)^2} = \frac{m_1^3}{\left(m_1 + m_2\right)^2},$$

ce qui prouve la Proposition : cette dernière quantité ne dépend que des masses et non des distances.

On recherche le temps où les deux masses se rejoignent ; d'après la Proposition 1, il est équivalent de rechercher le temps où m_2 rejoindra le centre de gravité O, immobile et affecté de la masse μ. On note simplement m au lieu de m_2 et $x(t)$ son abscisse au temps t avec $0 \leq x(t) \leq d_2$. La masse m se déplace vers la gauche. Elle est soumise à l'attraction newtonienne :

$$F_2 = -\frac{Gm\mu}{x(t)^2}.$$

Il en résulte que la masse m est soumise à une accélération dirigée vers la gauche :

$$\gamma = -\frac{G\mu}{x(t)^2}.$$

Notant $v(t)$ la vitesse à l'instant t, on obtient :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{G\mu}{x(t)^2},$$

et donc :

$$\frac{dv}{dt}v(t) = -\frac{G\mu}{x(t)^2}\frac{dx}{dt}.$$

En intégrant ceci :

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{G\mu}{x(t)} + C,$$

où C est une constante que nous allons déterminer.

A l'instant 0, $x = d_2$ et $v = 0$, donc :

$$C = -\frac{G\mu}{d_2}.$$

On obtient finalement l'équation différentielle :

$$v^2 = 2G\mu\left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{d_2}\right)$$

On a bien $\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{d_2} \geq 0$ puisque $x(t) \leq d_2$. On obtient :

$$v(t) = -\sqrt{2G\mu\left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{d_2}\right)} = -\sqrt{\frac{2G\mu}{d_2}\left(\frac{1-x/d_2}{x/d_2}\right)} \quad (2)$$

On considère maintenant la vitesse en valeur absolue. Elle s'écrit :

$$v(t) = \sqrt{\frac{2G\mu}{d_2}}\sqrt{\frac{1-x/d_2}{x/d_2}},$$

et puisque :

$$d_2 = \frac{m_1 D}{m_1 + m_2},$$

$$v(t) = C\sqrt{\frac{1-x/d_2}{x/d_2}} \text{ avec :}$$

$$C = \sqrt{\frac{2G}{D}\frac{m_1^2}{m_1+m_2}}.$$

Nous avons obtenu une expression de la vitesse en fonction de la position :

Proposition 2. – *Lorsque l'abscisse de la masse* M_2 *est* x, $0 < x \le d_2$, *la vitesse de cette masse, orientée vers la gauche, est :*

$$v = \sqrt{\frac{2G}{D}\frac{m_1^2}{m_1+m_2}}\sqrt{\frac{1-x/d_2}{x/d_2}}.$$

Nous allons maintenant déterminer le déroulement du mouvement.

Posons $y = \frac{x}{d_2}$, $x = d_2 y$, $\frac{dx}{dt} = d_2\frac{dy}{dt}$; on obtient :

$$d_2\frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2G\mu}{d_2}\left(\frac{1-y}{y}\right)} \text{ et pour } t = 0, y = 1.$$

On a donc l'équation :

$$\sqrt{\frac{y}{1-y}}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{d_2^{3/2}}\sqrt{2G\mu}$$

Posons :

$F(x) = \arcsin\sqrt{1-x} - \sqrt{x(1-x)}$.

On vérifie que $F'(x) = -\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$. On a, à tout instant T :

$$\int_{t=0}^{t=T} \sqrt{\frac{y}{1-y}}\frac{dy}{dt}\,dt = \int_{t=0}^{t=T} \frac{1}{d_2^{3/2}}\sqrt{2G\mu}\,dt = T\frac{1}{d_2^{3/2}}\sqrt{2G\mu}$$

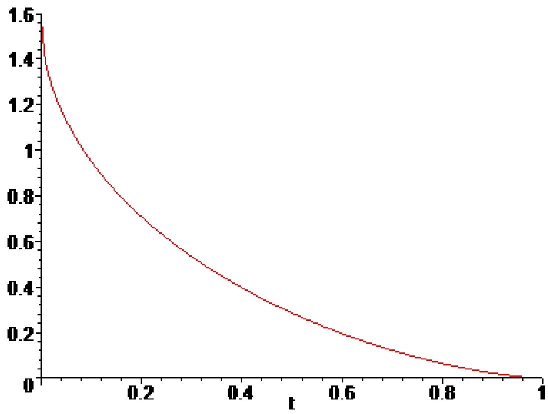
et donc :

$$\left(\arcsin\sqrt{1-y(T)} - \sqrt{y(T)(1-y(T))}\right) - \left(\arcsin\sqrt{1-y(0)} - \sqrt{y(0)(1-y(0))}\right) = T\frac{1}{d_2^{3/2}}\sqrt{2G\mu}$$

Or, au temps $t=0$, $y(0)=1$. L'équation s'écrit :

$$\arcsin\sqrt{1-y(T)} - \sqrt{y(T)(1-y(T))} = T\frac{1}{d_2^{3/2}}\sqrt{2G\mu} \quad (3)$$

Voici le graphe de la fonction $F(x)$, $0 \le x \le 1$:



La dérivée vaut $F'(x) = -\sqrt{\dfrac{1-x}{x}} < 0$. Elle est toujours strictement négative ; la fonction est décroissante. Comme le second membre est une fonction croissante, l'équation (3) admet une solution unique.

Nous avons obtenu, en remplaçant $d_2 = \dfrac{m_1 D}{m_1 + m_2}$:

Proposition 3. – *A tout instant T, la position $x(T)$ est solution de l'équation implicite :*

$$\arcsin\sqrt{1-\frac{m_1+m_2}{m_1 D}x(T)} - \sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 D}x(T)\left(1-\frac{m_1+m_2}{m_1 D}x(T)\right)} = T\sqrt{2G}\,\sqrt{m_1+m_2}\,\frac{1}{D^{3/2}}$$

Nous allons maintenant déterminer le temps final de rapprochement des deux masses.

Au temps final T_{final}, $x\left(T_{final}\right)=0$; l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\frac{\pi}{2}=T_{final}\sqrt{2G}\,\sqrt{m_1+m_2}\,\frac{1}{D^{3/2}}$$

ou encore :

$$T_{final}=\frac{\pi}{2\sqrt{2G}}\frac{D^{3/2}}{\sqrt{m_1+m_2}}.$$

Nous avons obtenu :

Proposition 4. – *Les deux masses se rejoignent au temps T_{final} donné par :*

$$T_{final}=\frac{\pi}{2\sqrt{2G}}\frac{D^{3/2}}{\sqrt{m_1+m_2}}$$

où $G=6,674\ \times\ 10^{-11}\,m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation.

Nous l'avons déjà dit : le temps T_{final} dépend de la masse totale m_1+m_2 alors que la force dépend du produit m_1m_2.

Remarque complémentaire. – La formule $F=\frac{GmM}{d^2}$ présente une "singularité" lorsque $d=0$: la force devient infinie lorsque les deux masses sont proches, ce qui est évidemment absurde en pratique.

Cette formule ne fait intervenir que les masses, non les volumes ou les surfaces. Elle ne se prête donc pas à l'interprétation en termes d'ondes gravitationnelles.

4. Application numérique

Calcul du temps final, dans la situation $D=1\,\text{m}$, $m_1=m_2=1$ kg.

On trouve : $T_{final}=\frac{\pi}{4\sqrt{G}}=\frac{\pi}{4\sqrt{6,674\ \times\ 10^{-11}}}\approx 96\,138\text{ s}\approx 27\text{ heures}$

Suivi de la trajectoire

L'équation est :

$$\arcsin\sqrt{1-2x(T)}-\sqrt{2x(T)\left(1-2x(T)\right)}=2T\sqrt{G}$$

où $x(T)$ est la position de la masse M_2 au temps T ; on a $x(0)=\frac{1}{2}$. Les deux masses se rencontrent à l'origine et $x(T_{final})=0$.

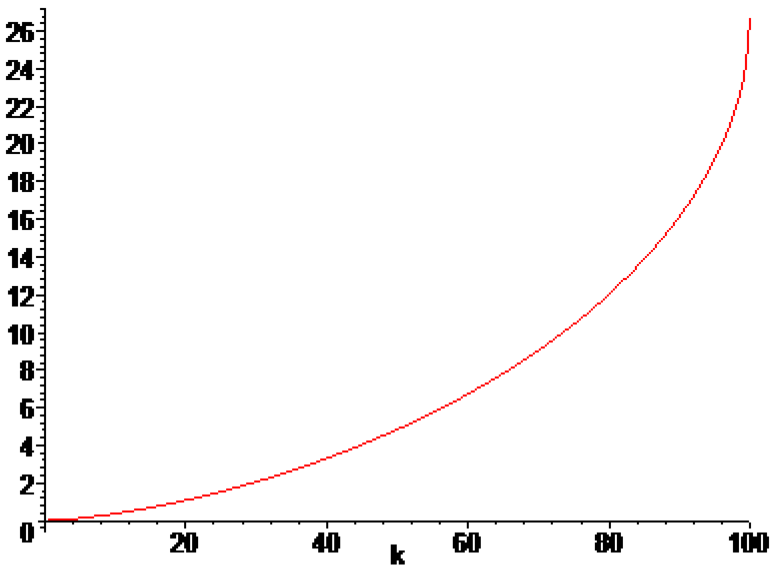
Discrétisons l'intervalle $0-1/2$ en $N=100$ intervalles égaux, de bornes :

$$b_k=\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{100}\right)$$

Le temps t_k de passage en b_k est, en secondes :

$$t_k=\frac{1}{2\sqrt{G}}\left(\arcsin\sqrt{1-2b_k}-\sqrt{2b_k(1-2b_k)}\right)=\frac{1}{2\sqrt{G}}\left(\arcsin\sqrt{\frac{k}{100}}-\sqrt{\frac{k}{100}\left(1-\frac{k}{100}\right)}\right)$$

Voici le graphique en heures :



Lorsqu'on approche du point de rencontre, x est proche de 0 et le terme $\sqrt{2x(T)(1-2x(T))}$ est voisin de 0. L'équation devient :

$$\arcsin\sqrt{1-2x(T)}=2T\sqrt{G}$$

$$\sqrt{1-2x(T)}=\sin\left(2T\sqrt{G}\right),\ 1-2x(T)=\sin^2\left(2T\sqrt{G}\right)$$

et finalement :

$$x(T)=\frac{1-\sin^2\left(2T\sqrt{G}\right)}{2}.$$

On aura $x=0$ si $\sin^2\left(2T\sqrt{G}\right)=1$, $2T\sqrt{G}=\frac{\pi}{2}$, $T=\frac{\pi}{4\sqrt{G}}$, comme vu précédemment.

Si l'une des masses est nulle, le temps final sera :

$$T_{final}=\frac{\pi}{2\sqrt{2G}}\frac{D^{3/2}}{\sqrt{m_1}}$$

avec $D=1\,\mathrm{m}$, $m_1=1$ kg, nous obtenons

$$T_{final}=\frac{\pi}{2\sqrt{2G}}\approx 135\,960\ \mathrm{s}\approx 38\ h\ .$$

5. Formule générale à la limite

Nous calculons maintenant $x(T)$ au voisinage du point de rencontre

Au voisinage de l'origine ($x\approx 0$), le terme $\sqrt{\frac{m_1+m_2}{m_1 D}x(T)\left(1-\frac{m_1+m_2}{m_1 D}x(T)\right)}$ est négligeable et l'équation de position devient :

$$\arcsin\sqrt{1-\frac{m_1+m_2}{m_1 D}x(T)}=T\sqrt{2G}\ \sqrt{m_1+m_2}\ \frac{1}{D^{3/2}}$$

ou encore :

$$1-\frac{m_1+m_2}{m_1 D}x(T)=\sin^2\left(T\sqrt{2G}\ \sqrt{m_1+m_2}\ \frac{1}{D^{3/2}}\right)$$

$$1-\sin^2\left(T\sqrt{2G}\ \sqrt{m_1+m_2}\ \frac{1}{D^{3/2}}\right)=\frac{m_1+m_2}{m_1 D}x(T)$$

ce qui s'écrit finalement :

$$x(T)=\frac{m_1 D}{m_1+m_2}\cos^2\left(\frac{\sqrt{2G\left(m_1+m_2\right)}}{D^{3/2}}T\right)$$

6. L'une des masses devient infiniment petite

On considère maintenant que les deux masses sont à distance D fixe ; la masse m_2 ne change pas, mais la masse $m_1\to 0$. Que devient le temps de rapprochement ?

Comme $m_1 d_1 = m_2 d_2$, on a $d_2 \to 0$ et comme $d_1 + d_2 = D$, $d_1 \to D$; autrement dit, le centre de gravité, qui est le point de rapprochement, se rapproche de M_2 ; la masse m_2 parcourt de moins en moins de chemin et la masse m_1 de plus en plus.

Lorsque $m_1 \to 0$, $T_{final} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2G}} \dfrac{D^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2}} \to \dfrac{\pi}{2\sqrt{2G}} \dfrac{D^{3/2}}{\sqrt{m_2}}$.

Autrement dit, lorsque $m_1 \to 0$, la masse M_2 parcourt un trajet de plus en plus petit ($d_2 \to 0$) et la masse M_1 parcourt un trajet dont la longueur totale tend vers D. Ceci explique que le temps final T_{final} admette une limite.

Cependant, il y a une discontinuité : si $m_1 = 0$, il n'y a plus d'attraction du tout et $T_{final} = +\infty$.