



Attraction Newtonienne entre deux masses au repos

Une anomalie dans la loi de Newton de l'attraction universelle

Bernard Beauzamy, 15/03/2026

1. Résumé

La loi de Newton exprimant l'attraction universelle est communément utilisée en complément quantitatif des lois de Kepler, en particulier pour les satellites et la détermination des trajectoires des fusées de toute nature. Pourtant, quand on veut l'appliquer à la situation très simple, parfaitement naturelle et parfaitement licite, de deux masses au repos, attirées l'une vers l'autre, on obtient des résultats présentant manifestement des anomalies. Le temps de rapprochement des deux masses ne tend pas vers 0, même si l'une des deux masses devient très faible.

2. Présentation du problème

On dispose de deux masses ponctuelles M_1, M_2 , immobiles, situées à distance D l'une de l'autre. Chacune est soumise à l'attraction newtonienne :

$$F = \frac{G m_1 m_2}{D^2}$$

où $G = 6,674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation.

Nous établissons le résultat suivant, qui est très étrange :

Théorème – *Les deux masses se rejoignent au temps T_{final} donné par :*

$$T_{final} = \frac{\pi}{2\sqrt{2G}} \frac{D^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2}}$$

Ce résultat est étrange à deux titres :

Il fait intervenir la somme des masses, alors que la force faisait intervenir le produit ;

Le temps n'est pas infini, même si l'une des masses est nulle, alors qu'en toute logique, si l'une des masses est nulle, il n'y a plus d'attraction et les masses ne se rapprochent plus.

La formule de l'attraction universelle est étrange à plusieurs titres. La masse M_1 , du fait de l'attraction par M_2 , est soumise à une accélération :

$$\gamma_1 = \frac{G m_2}{D^2}$$

expression qui ne fait pas intervenir la masse m_1 , ce qui est anormal comme expliqué plus haut.

3. Mise en équations

L'axe des x est porté par le segment joignant les deux masses ; l'origine O est prise au centre de gravité. Celui-ci est immobile, puisque le système est isolé.

Proposition 1. - *Le mouvement de la masse M_2 est le même que si elle était soumise à l'attraction d'une masse $\mu = \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2}$ située au centre de gravité.*

Démonstration

Une masse μ au centre de gravité exercera l'attraction :

$$F_O = \frac{G \mu m_2}{d_2^2}.$$

Les deux forces sont égales si :

$$\mu = \frac{m_1 d_2^2}{(d_1 + d_2)^2} \quad (1)$$

Par définition du centre de gravité :

$$m_1 d_1 = m_2 d_2 \quad \text{ou} \quad d_1 = \frac{m_2}{m_1} d_2.$$

En reportant dans (1), on obtient :

$$\mu = \frac{m_1}{\left(\frac{m_2}{m_1} + 1\right)^2} = \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2},$$

ce qui prouve la Proposition : cette dernière quantité ne dépend que des masses et non des distances.

On recherche le temps où les deux masses se rejoignent ; d'après la Proposition 1, il est équivalent de rechercher le temps où m_2 rejoindra le centre de gravité O , immobile et affecté de la masse μ . On note simplement m au lieu de m_2 et $x(t)$ son abscisse au temps t avec $0 \leq x(t) \leq d_2$. La masse m se déplace vers la gauche. Elle est soumise à l'attraction newtonienne :

$$F_2 = -\frac{Gm\mu}{x(t)^2}$$

Il en résulte que la masse m est soumise à une accélération dirigée vers la gauche :

$$\gamma = -\frac{G\mu}{x(t)^2}.$$

Notant $v(t)$ la vitesse à l'instant t , on obtient :

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{G\mu}{x(t)^2},$$

et donc :

$$\frac{dv}{dt} v(t) = -\frac{G\mu}{x(t)^2} \frac{dx}{dt}.$$

En intégrant ceci :

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{G\mu}{x(t)} + C$$

où C est une constante que nous allons déterminer.

A l'instant 0, $x = d_2$ et $v = 0$, donc :

$$C = -\frac{G\mu}{d_2}.$$

On obtient finalement l'équation différentielle :

$$v^2 = 2G\mu \left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{d_2} \right)$$

On a bien $\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{d_2} \geq 0$ puisque $x(t) \leq d_2$. On obtient :

$$v(t) = -\sqrt{2G\mu\left(\frac{1}{x(t)} - \frac{1}{d_2}\right)} = -\sqrt{\frac{2G\mu}{d_2}\left(\frac{1-x/d_2}{x/d_2}\right)} \quad (2)$$

On considère maintenant la vitesse en valeur absolue. Elle s'écrit :

$$v(t) = \sqrt{\frac{2G\mu}{d_2}} \sqrt{\frac{1-x/d_2}{x/d_2}}$$

et puisque :

$$d_2 = \frac{m_1 D}{m_1 + m_2},$$

$$v(t) = C \sqrt{\frac{1-x/d_2}{x/d_2}} \text{ avec :}$$

$$C = \sqrt{\frac{2G}{D} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}}$$

Nous avons obtenu une expression de la vitesse en fonction de la position :

Proposition 2. – Lorsque l'abscisse de la masse M_2 est x , $0 < x \leq d_2$, la vitesse de cette masse, orientée vers la gauche, est :

$$v = \sqrt{\frac{2G}{D} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2}} \sqrt{\frac{1-x/d_2}{x/d_2}}.$$

Nous allons maintenant déterminer le déroulement du mouvement.

Posons $y = \frac{x}{d_2}$, $x = d_2 y$, $\frac{dx}{dt} = d_2 \frac{dy}{dt}$; on obtient :

$$d_2 \frac{dy}{dt} = \sqrt{\frac{2G\mu}{d_2} \left(\frac{1-y}{y}\right)} \text{ et pour } t=0, y=1.$$

On a donc l'équation :

$$\sqrt{\frac{y}{1-y}} \frac{dy}{dt} = \frac{1}{d_2^{3/2}} \sqrt{2G\mu}$$

Posons :

$$F(x) = \arcsin \sqrt{1-x} - \sqrt{x(1-x)}$$

On vérifie que $F'(x) = \sqrt{\frac{x}{1-x}}$

On a, à tout instant T :

$$\int_{t=0}^{t=T} \sqrt{\frac{y}{1-y}} \frac{dy}{dt} dt = \int_{t=0}^{t=T} \frac{1}{d_2^{3/2}} \sqrt{2G\mu} dt = T \frac{1}{d_2^{3/2}} \sqrt{2G\mu}$$

et donc :

$$\left(\arcsin \sqrt{1-y(T)} - \sqrt{y(T)(1-y(T))} \right) - \left(\arcsin \sqrt{1-y(0)} - \sqrt{y(0)(1-y(0))} \right) = T \frac{1}{d_2^{3/2}} \sqrt{2G\mu}$$

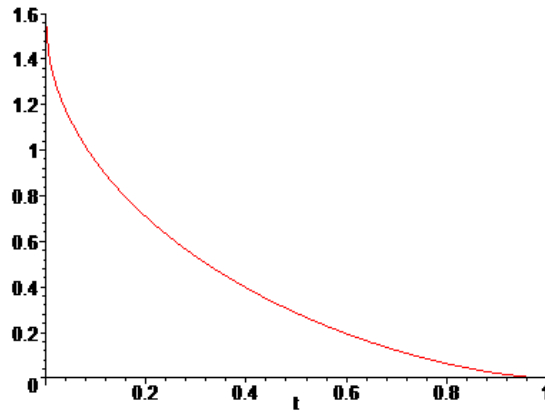
Or, au temps $t = 0$, $y(0) = 1$. L'équation s'écrit :

$$\arcsin \sqrt{1-y(T)} - \sqrt{y(T)(1-y(T))} = T \frac{1}{d_2^{3/2}} \sqrt{2G\mu} \quad (3)$$

Si l'on pose :

$$\varphi(x) = \arcsin(\sqrt{1-x}) - \sqrt{x(1-x)},$$

voici le graphe de cette fonction, $0 \leq x \leq 1$:



La dérivée vaut $\varphi'(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{x}} < 0$. Elle est toujours strictement négative ; la fonction est décroissante. Comme le second membre est une fonction croissante, l'équation (3) admet une solution unique.

Nous avons obtenu, en remplaçant $d_2 = \frac{m_1 D}{m_1 + m_2}$:

Proposition 3. – A tout instant T , la position $x(T)$ est solution de l'équation implicite :

$$\arcsin \sqrt{1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 D} x(T)} - \sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 D} x(T) \left(1 - \frac{m_1 + m_2}{m_1 D} x(T)\right)} = T \sqrt{2G} \sqrt{m_1 + m_2} \frac{1}{D^{3/2}}$$

Nous allons maintenant déterminer le temps final de rapprochement des deux masses.

Au temps final T_f , $x(T_f) = 0$; l'équation ci-dessus s'écrit :

$$\frac{\pi}{2} = T_f \sqrt{2G} \sqrt{m_1 + m_2} \frac{1}{D^{3/2}}$$

ou encore :

$$T_f = \frac{\pi}{2\sqrt{2G}} \frac{D^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2}}.$$

Nous avons obtenu :

Proposition 4. – Les deux masses se rejoignent au temps T_{final} donné par :

$$T_{final} = \frac{\pi}{2\sqrt{2G}} \frac{D^{3/2}}{\sqrt{m_1 + m_2}}$$

où $G = 6,674 \times 10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$ est la constante universelle de gravitation.

Le temps T_{final} dépend de la masse totale $m_1 + m_2$ alors que la force dépend du produit $m_1 m_2$.

Remarques complémentaires. – La formule $F = \frac{GmM}{d^2}$ présente une "singularité" lorsque $d = 0$: la force devient infinie lorsque les deux masses sont proches, ce qui est évidemment absurde en pratique.

Cette formule ne fait intervenir que les masses, non les volumes ou les surfaces. Elle ne se prête donc pas à l'interprétation en termes d'ondes gravitationnelles.