Société de Calcul Mathématique SA
Outils d'aide à la décision
depuis 1995

Etude de la transition Jour-Nuit en fonction de la latitude

par Bernard Beauzamy

novembre 2017, paru dans "Quadrature", no 109, 2018, pp. 13-16

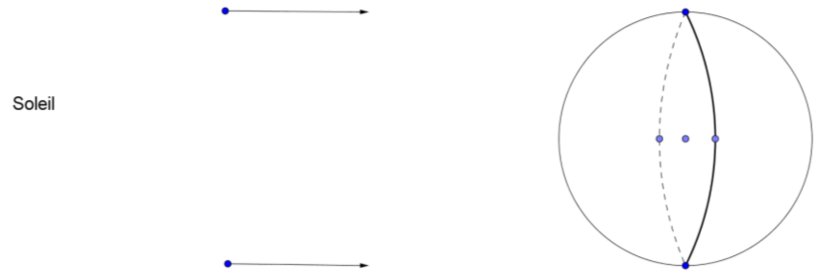
1. Introduction

Pourquoi la nuit tombe-t-elle plus rapidement au voisinage de l'équateur que dans les régions de plus haute latitude ? Le phénomène est bien connu, mais les réponses que l'on trouve sur Internet sont confuses et souvent incorrectes.

On s'intéresse ici à la durée de la transition entre le jour et la nuit, et non pas à la durée du jour ou de la nuit. Comme le mot "jour" est ambigu (il désigne aussi une période de 24 heures), nous parlerons de la transition entre la lumière et l'obscurité, en abrégé TLO. Le mot usuel est "crépuscule", mais il en existe plusieurs définitions : civil, nautique, astronomique (voir Wikipedia), qui sont différentes. L'éclairement persiste alors que le Soleil a disparu à l'horizon, du fait de la réfraction des rayons sur les hautes couches de l'atmosphère. Ce n'est pas ce que nous considérons ici : nous nous limitons à un "crépuscule simplifié", ou, si l'on préfère, à une Terre sans atmosphère : quand, en fonction de la latitude, voit-on le Soleil en partie ou en totalité ?

Dans ce qui suit, le Soleil et la Terre seront assimilés à des sphères. L'aplatissement de la Terre aux pôles ne joue aucun rôle ici.

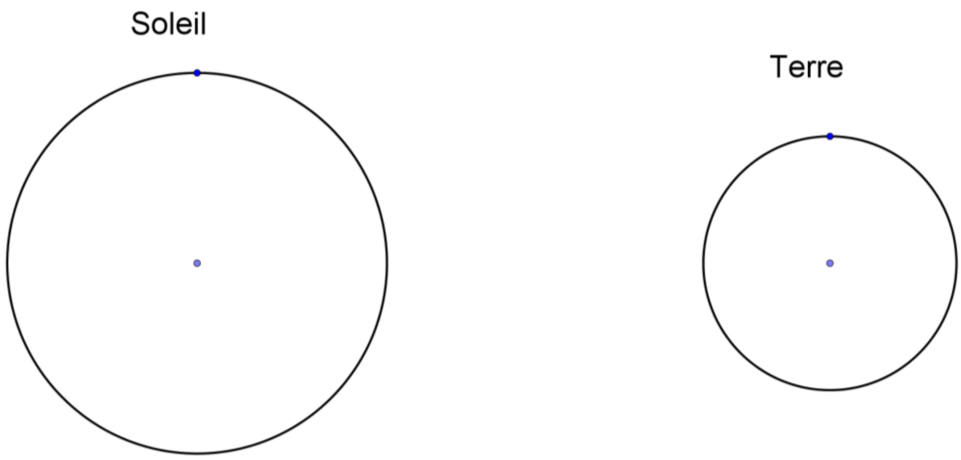
Si le Soleil est assimilé à un point (situé à l'infini), cette transition est instantanée, où qu'on soit sur le globe terrestre. En effet, la courbe de séparation entre l'obscurité et la lumière est un cercle, plus précisément un "grand cercle", ce qui signifie que le plan qui le contient passe par le centre de la Terre.



Peu importe, dans cette approche, comment la Terre tourne sur elle-même et avec quelle vitesse : le passage de l'obscurité à la lumière, et vice-versa, est instantané.

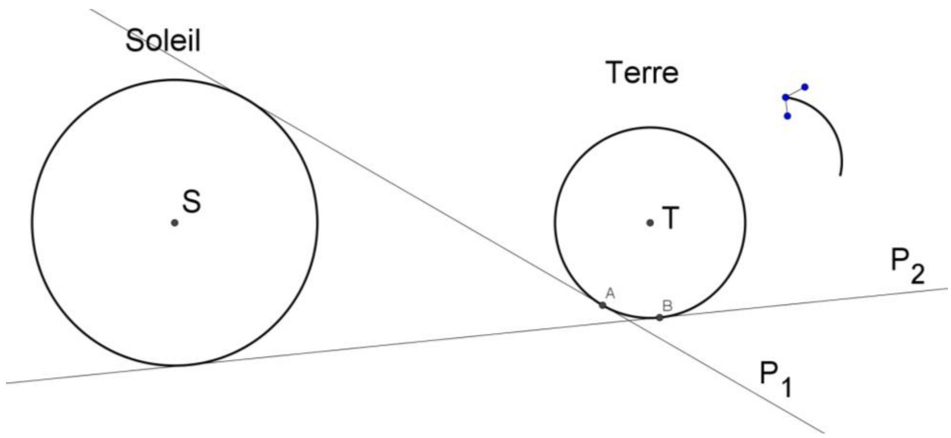
L'étude de la TLO suppose donc que le Soleil ne soit plus considéré comme un point, mais comme une sphère avec un diamètre non nul.

Une remarque importante est que la TLO ne dépend pas de la rotation de la Terre autour du Soleil, mais seulement de la rotation de la Terre autour d'elle-même (mouvement "diurne"). Nous sommes donc amenés à une représentation statique : le Soleil et la Terre sont représentés par deux sphères, immobiles l'une par rapport à l'autre ; la Terre tourne autour d'elle-même (nous en parlerons plus loin).



La Terre tourne sur elle-même, dans le sens trigonométrique si on se place au-dessus du pôle Nord.

La durée de la TLO est, pour un point donné sur la Terre, le laps de temps qui s'écoule entre le dernier instant où il reçoit tous les rayons du Soleil (lumière complète) et le premier instant où il n'en reçoit plus aucun (obscurité complète).

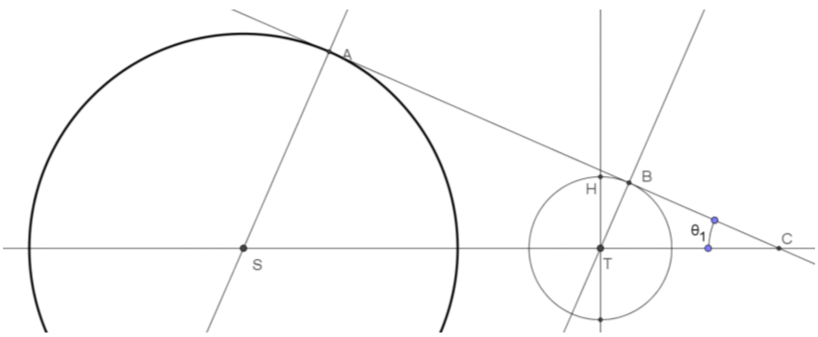


2. Notion de plan tangent

Soit A un point quelconque sur la Terre et P le plan tangent à la Terre en A. Le dernier instant où A va recevoir toute la lumière du Soleil est celui où P est aussi tangent "intérieurement" au Soleil (position P_1 dans la figure ci-dessus). Si maintenant, du fait de la rotation de la Terre autour d'elle-même, le point A passe en B, le dernier instant où B est éclairé est celui où le plan tangent en B à la Terre est aussi tangent au Soleil "extérieurement" (position P_2 dans la figure ci-dessus). Mais attention : le passage de A à B ne se fait pas dans un même plan, contenant les centres de la Terre et du Soleil : l'axe de rotation de la Terre est incliné sur le plan de l'écliptique.

Soient S et T les centres respectifs du Soleil et de la Terre. La figure constituée des deux sphères est invariante par rotation autour de l'axe ST. Considérons l'ensemble des points A tels que le plan tangent à la Terre en A soit tangent au Soleil intérieurement : cet ensemble est invariant par rotation et est donc un cercle sur la Terre. Le plan de ce cercle est perpendiculaire à l'axe ST et il coupe cet axe entre S et T (très près de T, évidemment). Nous le notons C_1. De la même façon, l'ensemble des points B pour lesquels le plan tangent à la Terre en B est tangent au Soleil extérieurement est aussi un cercle, que nous notons C_2. Le plan contenant ce cercle est perpendiculaire à l'axe ST et il coupe cet axe en dehors du segment ST, au-delà de T mais très près de T parce que le Soleil est très loin.

Les deux cercles C_1 et C_2 sont des caractéristiques géométriques, qui ne dépendent que du diamètre du Soleil et de la Terre et de leur distance respective. Ils ne dépendent pas de la rotation de la Terre sur elle-même. Nous allons maintenant préciser la position de ces cercles.



Les triangles CBT et CAS sont semblables. Notons $R = AS$ le rayon du Soleil, $r = BT$ le rayon de la Terre et $D = ST$ la distance Soleil-Terre. Nous avons :

$$\frac{CT}{CS} = \frac{TB}{SA}$$

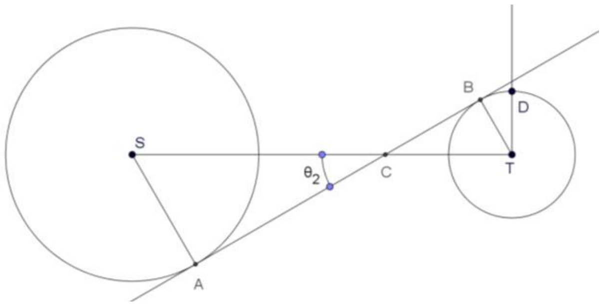
et donc :

$$CT = \frac{r}{R} CS$$

De plus, $CT + D = CS$, et donc $\frac{r}{R} CS + D = CS$, $D = CS\left(1 - \frac{r}{R}\right)$, $CS = \frac{DR}{R-r}$ et $CT = \frac{Dr}{R-r}$.

Soit ϑ_1 l'angle $TCB = BTH$. On a $\sin(\vartheta_1) = \frac{BT}{CT} = \frac{R-r}{D}$.

Voyons maintenant le second cercle :



Les triangles SAC et CBT sont semblables, donc $\frac{SA}{SC} = \frac{BT}{TC}$ et $TC = \frac{r}{R} SC$. Par ailleurs, $TC + CS = D$. On en déduit $TC = \frac{r}{R+r} D$ et $SC = \frac{R}{R+r} D$. En notant ϑ_2 l'angle $ACS = TCB = BTD$, on obtient :

$$\sin(\vartheta_2) = \frac{AS}{CS} = \frac{R+r}{D}.$$

On observe ainsi que $\vartheta_2 > \vartheta_1$.

Les valeurs numériques sont approximativement :

$D = 150 \times 10^6$ km, $R \approx 695\,500$ km, $r \approx 6\,371$ km,

ce qui donne :

$\vartheta_1 \approx \sin(\vartheta_1) \approx 0.00459$ (rd)

$\vartheta_2 \approx \sin(\vartheta_2) \approx 0.00468$ (rd).

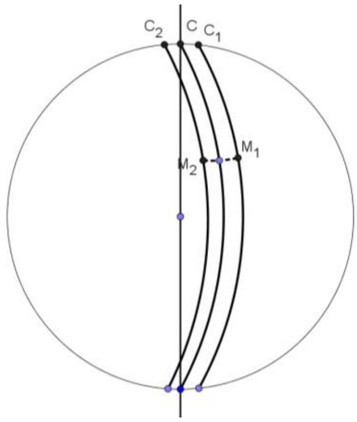
La distance séparant le cercle C_1 d'un grand cercle (distance mesurée à la surface de la Terre) est $r\vartheta_1$ et $r\vartheta_2$ pour le cercle C_2.

3. Introduire la rotation de la Terre

Nous pouvons maintenant oublier la figure géométrique incluant le Soleil : toute l'information dont nous avons besoin se résume aux deux cercles C_1 et C_2.

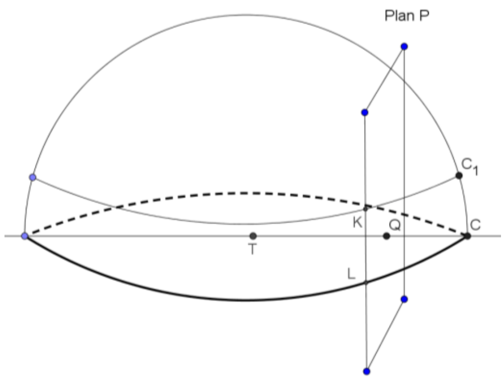
- Considérons d'abord un cas simple fictif

Supposons dans ce paragraphe que l'axe de rotation de la Terre soit perpendiculaire au plan de l'écliptique. Nous avons alors la figure suivante :



L'axe de rotation de la Terre est ici une droite verticale. Nous avons un grand cercle C, fixe (orienté vers le Soleil) et, de part et d'autre, deux cercles parallèles qui sont C_1 et C_2. Nous prenons un point quelconque M_2 sur C_2 ; la rotation autour de l'axe va l'amener en M_1 : il aura décrit un arc de cercle horizontal. Nous voulons montrer que plus M_2 s'éloigne de l'équateur et plus cet arc est long ; comme la vitesse de rotation est constante, cela signifie que le temps est plus long.

Introduisons le point intermédiaire M situé sur le grand cercle. Il suffit de montrer la propriété séparément pour les arcs M_2M et MM_1 ; autrement dit, nous pouvons nous restreindre à une demi-sphère. L'énoncé devient :



Proposition 1. - *Soit une demi-sphère de centre T, posée sur le plan horizontal ; soit C le grand cercle qui la limite et C_1 un cercle horizontal, situé au-dessus de C. Coupons la figure par un plan P vertical et qui se déplace perpendiculairement à l'axe des x ; soient K, L les intersections respectives de ce plan avec C_1 et C. Alors la longueur de l'arc de cercle KL (mesurée sur la sphère) augmente lorsque le plan s'éloigne du centre T de la sphère.*

Démonstration

On peut supposer la sphère de rayon $r = 1$. Soit Q le point d'intersection du plan avec l'axe ; posons $\lambda = TQ$. Notons h la valeur de z sur le cercle C_1 (altitude de C_1 au-dessus du plan horizontal). On a $h = \sin(\vartheta_1)$.

Le rayon du cercle C_1, noté r_1, vaut :

$$r_1 = \sqrt{1-h^2} \qquad (1)$$

et l'équation de C_1 est $x^2 + y^2 = 1-h^2$, $z = h$.

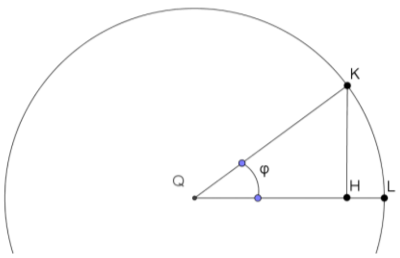
Les coordonnées du point K sont $x = \sqrt{1-h^2-\lambda^2}, y = \lambda, z = h$. Les coordonnées de L sont $x = \sqrt{1-\lambda^2}, y = \lambda, z = 0$. Les coordonnées de Q sont $x = 0, y = \lambda, z = 0$.

Le cercle de centre Q, passant par K et L, noté C', a pour équation :

$x^2 + z^2 = 1-\lambda^2$ et $y = \lambda$.

Le rayon est $r' = \sqrt{1-\lambda^2}$.

Faisons une représentation plane du cercle C', dans le plan P :



On a $\tan(\varphi) = \dfrac{h}{\sqrt{1-h^2-\lambda^2}}$ et h est très petit devant r : $\dfrac{h}{r} = \sin(\vartheta_1) \approx 0.00459$; donc, sauf si $\lambda \simeq 1-h^2$, $\tan(\varphi) \approx \varphi$; la quantité que l'on considère est :

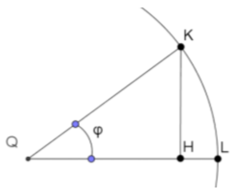
$$l_1 = \sqrt{1-\lambda^2}\,\frac{h}{\sqrt{1-h^2-\lambda^2}}$$

ou encore :

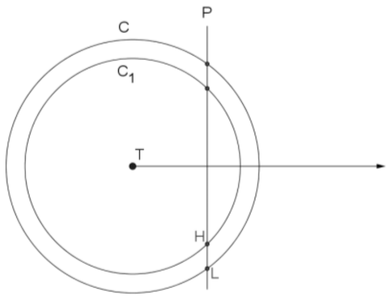
$$l_2 = \frac{1-\lambda^2}{1-h^2-\lambda^2} = 1 + \frac{h^2}{1-h^2-\lambda^2}$$

qui est évidemment une fonction croissante de λ. Ceci prouve la Proposition 1.

On peut donner une démonstration résultant d'une approche géométrique, qui ne fait pas appel aux coordonnées :



On a $KL^2 = KH^2 + HL^2$. Or KH est constant (altitude fixe) et HL est croissant, comme le montre la figure suivante :



Dans cette figure, on voit la demi-sphère par le dessus (elle est vue du Soleil) : projection sur le plan horizontal. La projection de C_1 sur le plan horizontal (encore notée C_1) est un cercle concentrique à C. L'intersection par un plan perpendiculaire à un axe donne le segment HL de la figure précédente. Il est évident que la longueur de HL augmente lorsque le plan s'éloigne de l'origine.

- Cas général

On note β l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation de la Terre avec le plan de l'écliptique. On se place dans un repère où l'axe Oz est dirigé vers le Soleil. On a un grand cercle C que l'on peut supposer de rayon 1, base de la demi-sphère, et un cercle C_1, comme précédemment, situé à une hauteur h au-dessus de C et parallèle à C.

L'axe de rotation de la Terre est dans le plan xOz ; il a donc pour équations, si l'on pose $b = \tan(\beta)$:

Axe rotation Terre : $z=-bx$, $y=0$. (1)

Un plan perpendiculaire à l'axe de rotation a donc pour équation :

P : $x-bz=\lambda$ (2)

L'intersection du cercle C et du plan P est le point M de coordonnées :

M : $\left(\lambda,\sqrt{1-\lambda^2},0\right)$ (3)

L'intersection du cercle C_1 et du plan P est le point N de coordonnées

N : $\left(\lambda+bh,\sqrt{1-h^2-(\lambda+bh)^2},h\right)$ (4)

L'arc MN a à peu près la même longueur que le segment MN.

Or MN^2 s'écrit comme la somme de trois différences, selon chacun des trois axes :

$$MN^2=(bh)^2+\left(\sqrt{1-h^2-(\lambda+bh)^2}-\sqrt{1-\lambda^2}\right)^2+h^2$$

Le premier et le troisième sont constants. Il suffit donc de montrer que :

$$f(\lambda)=\sqrt{1-\lambda^2}-\sqrt{1-h^2-(\lambda+bh)^2}$$

est une fonction croissante de λ.

Or

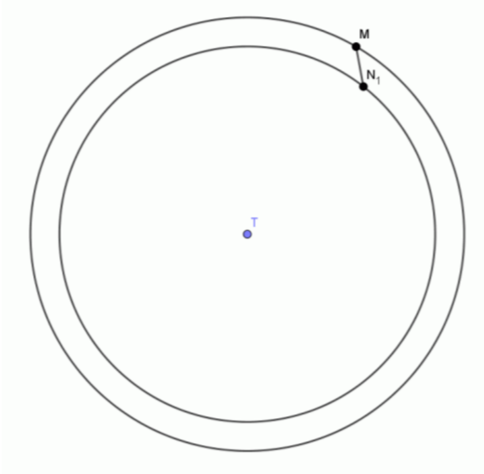
$$1-h^2-(\lambda+bh)^2=1-\lambda^2-2\lambda bh-h^2\left(1+b^2\right)\approx 1-\lambda^2-2\lambda bh$$

et cette quantité est positive si $0\le\lambda\le\sqrt{1+b^2h^2}-bh$. Sous cette hypothèse :

$$f(\lambda)\approx\sqrt{1-\lambda^2}-\sqrt{1-\lambda^2-2\lambda bh}=\frac{2\lambda bh}{\sqrt{1-\lambda^2}+\sqrt{1-\lambda^2-2\lambda bh}}$$

Il est évident que cette fonction est croissante : le numérateur est croissant et le dénominateur est décroissant. Ceci achève notre démonstration.

Au voisinage de $\lambda = 0$, $f(\lambda) \sim \frac{bh\lambda}{2}$: la décroissance de la transition est linéaire. Le phénomène de transition est discontinu : il cesse lorsque $\lambda \approx \sqrt{1+b^2h^2} - bh$.



Cette image représente la Terre vue du dessus (au-dessus du Pôle Nord). Le point M (défini plus haut) est l'intersection du cercle C et du plan P. Le point N_1 est la projection de N sur le plan contenant C, et N est l'intersection de P avec C_1. Lorsque λ augmente, le segment MN_1 se déplace parallèlement à lui-même, vers la droite, et sa longueur augmente.