



Méthodes mathématiques pour la gestion des incertitudes

Bernard Beauzamy
PDG, SCM SA

Exposé à l'ANDRA, 21 mai 2008

I. Présentation

N'importe quelle mesure, n'importe quelle étude scientifique, n'importe quel programme industriel, comportent des incertitudes :

- sur les données d'entrée ;
- sur les mesures en sortie ;
- sur les lois qui régissent les phénomènes ;
- sur les objectifs que l'on se fixe.

La manière la plus répandue pour les traiter consiste à ne pas s'en occuper, ou du moins ne pas s'en occuper au début. On fait comme si elles n'existaient pas, comme si les données étaient précises, les lois connues, les objectifs certains, et on résout en appliquant la panoplie des outils mathématiques disponibles.

Par exemple, pour un problème de propagation d'une pollution, on fait comme si on connaissait exactement l'étendue et la position de la pollution, la nature des terrains où elle est susceptible de se propager, etc. On procède à une résolution numérique, par discrétisation des diverses variables.

Mais cette approche n'est pas satisfaisante : les données sur lesquelles on travaille ont une précision factice.

Une fois le problème résolu avec ces données précises, incorporer les incertitudes n'est pas du tout facile. C'est même pratiquement impossible si l'outil est un logiciel, parce qu'un logiciel donne des réponses précises à des questions précises.

Les inconvénients de cette approche traditionnelle sont donc assez évidents :

- Elle oblige à calculer pendant des heures, sur des données précises, pour obtenir un résultat dont la validité n'est en rien assurée ;
- Elle ne donne aucune indication quant aux incertitudes en sortie ;
- Elle donne un faux sentiment de sécurité : on obtient un résultat avec seize chiffres significatifs en sortie, qui donne aux décideurs l'impression que le problème a été analysé avec la plus grande précision, ce qui est totalement faux.

Dans le domaine de l'environnement, en particulier, des notions qui interviennent de manière réglementaire (et qui sont donc imposées aux industriels), tels les seuils de rejet, les valeurs toxicologiques de référence, etc., sont généralement fixées sans évaluation préalable des incertitudes.

On y substitue des « coefficients de sécurité » tout à fait arbitraires. Le résultat est ce que nous qualifierons d'approche « pseudo-scientifique » : on a l'impression rassurante d'un résultat précis ; le seuil est à tant de microgrammes par litre ; au dessous on est tranquille, au dessus on est mort. Les politiques et les journaux se délectent de telles situations ; les industriels un peu moins.

Prenons un exemple très concret pour faire comprendre les dangers de l'approche précise : un contrat que nous avons traité pour le CNES en 2005-2006 ; il s'agissait de prévoir les points de chute des débris provenant de la désintégration d'un satellite, lorsque celui-ci rentre dans l'atmosphère. L'objectif est ici de calculer un montant monétaire, équivalent à une « prime d'assurance » : quels sont les dégâts estimés, en fonction de la zone ? Si ces dégâts sont trop importants, on guidera le satellite vers une autre zone.

On peut évidemment - c'est ce que faisait le CNES - traiter le problème de manière précise : le CNES dispose de gros outils de calcul, qui mettent des jours à tourner, susceptibles de prévoir le point d'impact de n'importe quel objet, en partant de sa position initiale, dans n'importe quelle atmosphère, sur n'importe quelle planète. En faisant tourner un tel logiciel, on parvient à prévoir le point de chute. Le problème est que les données d'entrée ne sont pas connues : la position initiale, seulement avec une certaine incertitude ; mais ni la forme ni le poids de l'objet ne sont bien connus (ils proviennent de la désintégration d'objets plus gros). La densité de l'atmosphère est également variable, avec l'altitude bien sûr, mais aussi avec la saison, l'heure, etc. Il est donc complètement évident que toutes les données que l'on mettra pour alimenter le logiciel seront arbitraires, voire factices.

Si on cherche à faire une mesure de radioactivité, comme fait l'IRSN sur des fûts (inventaire national des matières radioactives), on constate évidemment que les mesures sont

entachées d'incertitude. Il faut savoir évaluer cette incertitude si l'on veut « donner quitus » à l'exploitant dans sa propre déclaration : la valeur annoncée par l'exploitant est-elle correcte, et avec quelle marge d'erreur ?

On voit, sur tous ces exemples, que l'évaluation des incertitudes est indispensable, et qu'elle ne peut passer par un calcul précis factice : d'autres méthodes sont nécessaires.

II. Méthodes robustes

Nous dirons qu'une méthode est « robuste » si elle prend en compte, dès la conception, la présence d'incertitudes. Une méthode précise, par exemple une méthode d'optimisation, n'est donc pas robuste. Bien sûr, la définition elle-même est imprécise : tenir compte des incertitudes, soit, mais jusqu'à quel point ?

C'est l'objet de notre programme de recherche « Robust Mathematical Modeling » (<http://www.scmsa.com/robust.htm>) d'essayer de concevoir et mettre en place des méthodes robustes. Une soixantaine d'institutions, d'universités, d'entreprises, participent à ce programme. Un travail que nous avons réalisé l'an dernier pour l'ANDRA s'y rapporte.

Bien entendu, quantité de méthodes existent, selon les domaines, mais nous essayons de faire émerger des axes directeurs les plus généraux possible : des méthodes, des outils, qui puissent s'adapter à une large variété de situations. Nous n'en sommes qu'au tout début, mais voici quelques principes :

1. Abandon de l'optimum

De manière systématique, la notion d'optimum doit être abandonnée. Cette règle est très désagréable pour les universitaires, parce qu'une bonne partie de la recherche académique (en particulier en économie mathématique) repose sur la recherche d'optima. Or, pour un problème réel, il n'y a jamais UN optimum, mais quantité de facteurs à prendre en considération. Par exemple, on souhaite diminuer les coûts à court terme, mais sans trop augmenter les coûts à long terme, tout en maintenant les investissements, sans réduire les compétences, tout en maintenant la paix sociale, et j'en oublie !

Que mettre à la place de l'optimum ? Tout simplement un ensemble de contraintes : on veut une solution ayant au moins, ou au plus, telle ou telle caractéristique. Le coût ne doit pas dépasser tant, etc. Peu importe si cette solution est la meilleure ou non ; de toute façon le mot « meilleur » n'a pas de sens.

2. La solution doit être grossière

Evidemment, comme les données d'entrée sont imprécises, la solution obtenue le sera également ; il faut avoir le courage de l'admettre. Météo-France, qui a le goût des scénarios

catastrophe, fait des calculs de température pour prouver le réchauffement climatique dans vingt ou trente ans ; les résultats sont présentés tous les dix km. Mais les données d'entrée n'étaient connues que tous les 100 km.

3. La solution doit être rapide

Le décideur ne veut pas attendre des heures qu'un calcul fin lui donne une précision factice ; il veut une solution grossière, obtenue en quelques secondes. Cette solution grossière sera une première base de raisonnement, que l'on affinera par la suite si besoin est. Si elle est trop grossière, on pourra renforcer les contraintes, ou bien au contraire les relaxer si aucune solution n'est trouvée. Nous obtenons ainsi le concept de *Quick Acceptable Solution* : solution rapide, grossière, acceptable en première analyse.

4. Les contraintes doivent être simplifiées

Il ne sert à rien de se donner des contraintes précises ; l'ensemble du problème doit être homogène. Si les données ne sont connues qu'à 20 % près, il est complètement inutile de dire : nous voulons que telle fraction soit 0.345 % du total sur telle plage, et 0.765 sur telle autre. On simplifiera donc les contraintes, en les prenant linéaires, ou au moins linéaires par morceaux.

Reste la question majeure : comment rendre compte des incertitudes, des imprécisions, sur les lois et sur les données ? C'est ici qu'interviennent les méthodes probabilistes.

III. Méthodes probabilistes

1. Description générale

On parle beaucoup aujourd'hui de méthodes probabilistes ; elles ont tendance à se répandre, pas toujours dans des situations où elles sont justifiées. Comme souvent lorsqu'une nouvelle mode apparaît, on la voit partout. Les probabilités sont une science exacte, et les méthodes probabilistes ont un domaine de validité bien défini ; c'est ce que nous allons maintenant voir.

Une méthode probabiliste est justifiée lorsqu'on décide que le phénomène à étudier dépend, au moins partiellement, du hasard. Ce n'est pas nécessairement vrai : rien, dans la nature à notre échelle, ne dépend réellement du hasard. Si je me promène sur un trottoir et si je reçois une tuile sur la tête, j'aurais pu le savoir en procédant à un examen attentif des toits.

Le hasard semble intervenir de manière fondamentale en mécanique quantique (peut-être est-ce le simple reflet de notre ignorance), mais à notre échelle il pourrait presque partout être réduit. Si j'ai un accident de la route, ce n'est pas entièrement dû au hasard.

Pourtant, il est souvent nécessaire, souvent utile, de faire « comme si » le phénomène était dû au hasard, tout simplement parce que l'on n'a pas les moyens, ou pas les connaissances, ou pas le temps, de chercher les causes fines. Et parce que dans bien des cas, cette recherche de causes fines prendra un temps fou, coûtera une fortune, et n'apportera rien de plus. S'adresser au hasard est donc un choix intellectuel délibéré. Nous allons voir des exemples.

Prenons les accidents de la route. Vous pouvez décider que l'accident est entièrement dû au hasard. Votre seule ressource est alors de prier, si vous êtes croyant.

Vous pouvez ensuite, dans un premier temps, rechercher les causes principales d'accident. Admettons pour simplifier que la première soit la vitesse. Vous fixerez une vitesse limite, et essaierez par des réglementations appropriées et des outils appropriés de la faire respecter.

Le nombre d'accidents va chuter, et vous aurez deux populations : ceux qui respectent la vitesse et ceux qui ne la respectent pas. Il y aura des accidents dans les deux, mais vous ne les traiterez pas de la même manière. Cependant, vous continuerez à considérer que, à l'intérieur des deux classes, l'accident est dû au hasard.

Vous pouvez encore, dans un deuxième temps, rechercher la seconde cause d'accident ; admettons que ce soit l'état des pneus. Vous aurez ainsi quatre classes d'individus, avec des règles différentes, et à l'intérieur de chaque classe, vous laissez opérer le hasard.

On peut évidemment raffiner : faire intervenir trois, quatre, vingt paramètres ; on obtiendra une croissance exponentielle du nombre de classes, avec des actions correspondantes. Bien sûr, le taux d'accident sera réduit, mais il ne sera jamais nul, car la liste des paramètres possibles est illimitée.

La question est donc : à quel moment s'arrête-t-on ?

Le principe de la méthode probabiliste consiste donc en deux questions :

- Quels paramètres vais-je probabiliser ?
- Quelles lois vais-je mettre sur ces paramètres ?

Lorsque le phénomène est décrit par une loi physique, la règle est simple : doivent être probabilisés tous les paramètres qui ne sont pas connus avec certitude. Ainsi, dans le cas du CNES, on a une formule donnant la résistance de l'air :

$$R = \frac{1}{2} \rho S C_x V^2$$

où R est la résistance, ρ la densité de l'air, S la surface du corps, C_x son coefficient de frottement, V sa vitesse par rapport à l'air.

Dans cette formule, lorsque nous avons traité ce contrat, nous avons considéré tous les paramètres comme des variables aléatoires ; pour la densité, différentes lois ont été adoptées en fonction de l'altitude. Nous avons même remplacé l'exposant 2 (carré de la vitesse) par une variable aléatoire α , suivant une loi uniforme entre 2 et 2.5, parce que personne n'est vraiment certain que, pour un mobile à 100 km d'altitude, à 7 km/s, la résistance de l'air soit proportionnelle au carré de la vitesse (c'est une loi empirique).

Les différents paramètres sont choisis selon une loi uniforme, dans un certain intervalle, lorsqu'on n'a pas d'autres connaissances. Si on dispose de connaissances partielles, on peut mettre une autre loi.

Après quoi, on procède à un grand nombre de tirages selon ces diverses lois (méthode de Monte-Carlo) et on regarde où tombe chacun d'eux. Le résultat n'est plus un point précis, mais une « carte probabiliste », dont voici un exemple :

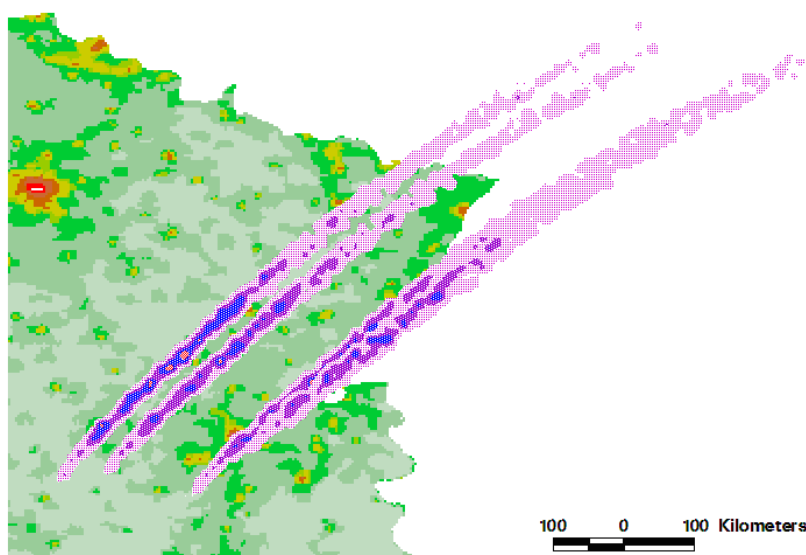


Figure 1 : carte probabiliste, retombée de débris spatiaux

Dans cet exemple, quatre objets résultent de la fragmentation du satellite ; les zones foncées ont plus de probabilité de recevoir un objet que les zones claires. Les cartes relatives à chaque objet sont décalées, car les objets n'ont pas tous la même surface ni le même C_x , et donc ils ne mettent pas le même temps à tomber ; pendant ce temps la Terre tourne.

A partir de telles cartes, on peut évidemment répondre à la question initiale : prime d'assurance à payer. Il suffit de superposer à la carte les densités de population, les sites particuliers, etc.

Le cas d'un phénomène physique est donc relativement simple conceptuellement ; il y a évidemment de nombreuses difficultés techniques. Le travail que nous avons réalisé pour l'ANDRA en 2007 entre dans ce cadre.

2. Deux précautions méthodologiques

Un point est vraiment essentiel : pour mettre en œuvre une méthode probabiliste, il faut des données. Les probabilités reposent avant tout sur des observations.

Ainsi une question du type : quelle est la probabilité de voir un martien débarquer sur Terre ? n'a pas de sens pour nous.

La seconde précaution, qui apparaît tout aussi évidente, est qu'il ne faut pas introduire de lois factices. Les lois doivent provenir de vraies données, résultant de vraies observations, faites sur un vrai terrain. Mais bien souvent, les responsables décident, par paresse intellectuelle : ici, nous supposons que la loi est gaussienne. Dans la réalité, il y a très peu de gaussiennes ; beaucoup moins en tout cas qu'on ne le croit. Faire une supposition du type « telle loi est gaussienne » est acceptable dans un premier temps, pour voir les résultats et tester la méthode, mais n'est pas acceptable lorsqu'il s'agit de fournir un outil d'aide à la décision.

3. Querelles statistiques

Quelle différence fait-on entre « probabilités » et « statistiques » ? Normalement, la statistique est une branche des probabilités, qui se met en œuvre lorsque les lois sont connues et lorsque les échantillons sont de taille suffisante (les deux conditions sont nécessaires simultanément).

Lorsque les méthodes statistiques peuvent être mises en œuvre, elles donnent de très bons résultats ; par exemple, les sondages électoraux, en France, sont assez précis, parce qu'on sait depuis longtemps comment déterminer des échantillons représentatifs et quelle taille ils doivent avoir. Mais la taille seule ne suffit pas. Imaginons un voyageur qui aborde les côtes de Chine et interroge cent millions d'habitants sur leurs habitudes alimentaires ; l'échantillon est très grand, mais il n'est pas représentatif puisqu'on est sur la côte : les gens mangent du poisson. On ne peut jamais savoir à l'avance si un échantillon est représentatif ou non, si on ne connaît pas la loi du phénomène.

Sur ces questions, les différents organismes emploient différents tests statistiques, tous aussi arbitraires les uns que les autres : on fait telle hypothèse sur la loi, on cale tel paramètre, et on trouve la conclusion que l'on souhaite. Ce sont par définition des situations où les méthodes statistiques sont à proscrire, puisqu'on ne connaît pas la loi et que les échantillons sont faibles.

Dans un article récent, André Aurengo [1] décrit très bien le mécanisme sociologique qui permet la naissance de peurs irrationnelles. Il prend l'exemple de la radiographie, à laquelle chacun est soumis. Voici le raisonnement qui permet d'affirmer l'existence de nombreux décès dus à la radiographie :

- Etape 1 : pour les fortes doses de rayonnement, on établit une loi entre la dose reçue et la probabilité de décès. Ceci est facile : parmi tant de personnes ayant reçu telle dose, tel pourcentage décède.
- Etape 2 : on extrapole aux faibles doses, autrement dit on déclare que la relation précédente, établie pour certaines doses (les fortes) est valable pour toutes.
- Etape 3 : on en déduit une probabilité de décès par personne, résultant d'une radiographie.
- Etape 4 : on multiplie par 60 millions (la population française) pour en déduire le nombre de morts.

Il est clair que les chiffres ainsi obtenus sont impressionnants.

Retenons ceci, sans aucun esprit polémique : la transposition des données obtenues dans une situation A à une situation B doit toujours se faire avec esprit critique. Nous l'avons dit : il faut des données pour mettre en œuvre une méthode probabiliste ; encore faut-il que ces données soient pertinentes.

4. Résultats obtenus

Les résultats donnés par une approche probabiliste sont nécessairement grossiers, par définition ! On s'abstiendra donc de donner des résultats avec douze chiffres après la virgule, ou bien des probabilités trop précises : les probabilités elles-mêmes doivent refléter la pauvreté, ou la richesse, des données.

Bien souvent, le résultat escompté sera sous forme d'ordre de grandeur. Voici des exemples de résultats obtenus.

Pour la réentrée des satellites, dirigeons le satellite vers une région à forte densité de population, et ajoutons une centrale nucléaire pour faire bonne mesure. Comptons une indemnité d'un million d'Euros si une personne est touchée, et dix millions si la centrale l'est. La prime d'assurance est de l'ordre de 100 Euros.

Comme on voit, correctement mises en œuvre, les méthodes probabilistes permettent d'obtenir des résultats sur lesquels on peut fonder une décision. Elles permettent aussi de reconstituer des données manquantes (Bernard Beauzamy et Olga Zeydina [3]), ce qui est facile à comprendre. Mais, ce qui est plus surprenant, elles permettent aussi d'améliorer la précision des mesures physiques, comme nous allons le voir.

5. Amélioration de la précision d'une mesure

Il peut paraître étonnant que des méthodes probabilistes (que les gens considèrent souvent comme floues, voire fumeuses) puissent permettre d'améliorer la précision d'une mesure. C'est pourtant l'une de leurs applications principales.

Le premier exemple d'application que nous avons donné a été l'amélioration de la précision d'un missile en phase terminale (contrat en cotraitance avec Matra BAe Dynamics, pour la DGA, 1999-2000) : il s'agissait de corriger les erreurs de l'autodirecteur infra-rouge, qui est un appareil de mesure des angles.

L'exemple le plus abouti d'une telle amélioration réside dans le travail mené par l'IRSN de 2003 à 2007 : amélioration de la mesure des matières nucléaires. Les inspecteurs vont sur le terrain et mesurent la radioactivité émanant de fûts ; ils la comparent à celle annoncée par l'exploitant. La mesure doit donc être aussi précise que possible.

Mais de nombreux facteurs peuvent affecter cette précision : la distance de mesure, la présence d'un écran, et le remplissage des fûts, qui n'est pas homogène. Un premier travail a consisté à définir ce qui pouvait être contrôlé, normalisé : c'est le cas pour la distance, mais à l'évidence ce n'est pas le cas pour le remplissage des fûts, sur lequel l'IRSN n'a pas d'action (on pourrait faire des recommandations aux exploitants). Il est donc légitime de considérer le remplissage comme aléatoire : les matières radioactives peuvent être n'importe où dans le fût.

L'IRSN a acquis des masses d'Uranium certifiées et a lancé un plan d'expériences : à partir de ces masses certifiées, voici ce qu'indiquent les appareils dans les diverses circonstances. La différence entre la masse certifiée et l'indication de l'appareil peut être considérée comme une erreur aléatoire (dépendant du hasard), car le remplissage du fût est inconnu. On prend l'erreur moyenne, qui est simplement l'espérance de cette erreur aléatoire, et on retranche cette erreur moyenne de l'indication de l'appareil : on obtient ainsi une table de correction, qui améliore la précision.

Cette correction n'est généralement pas la même sur toute la plage de mesure : un appareil n'a pas la même précision sur toute la gamme ; elle est plus mauvaise aux extrémités, meilleure au milieu.

On pourra consulter l'article de Pierre Funk [4] dans la Jaune et la Rouge pour la description générale du besoin et la publication commune IRSN/SCM [5] pour les résultats obtenus.

IV. Questions ouvertes

La principale difficulté conceptuelle des méthodes probabilistes est qu'elles s'appuient sur les situations déjà rencontrées ; une situation jamais rencontrée est de probabilité nulle.

Imaginons un extraterrestre qui débarque en France et qui visite deux élevages de poules. Pour le premier élevage, il compte 3 034 poules, pour le second 4 152. L'application stricte

des axiomes des probabilités revient à donner probabilité $1/2$ aux élevages avec 3 034 poules et $1/2$ aux élevages avec 4 152, et 0 à tous les autres.

Pourtant, on se dit que si notre extraterrestre avait persévéré, il aurait pu voir des élevages avec 3 poules, avec 3 423 poules, avec 5 678 poules, etc. Il n'est pas sain de leur donner une probabilité nulle.

Nous avons donc commencé (avec l'appui du CEA et de l'IRSN) la mise en place d'une méthode appelée EPH (Experimental Probabilistic Hypersurface). Elle est née lors d'un besoin exprimé par Framatome-ANP en 2002 : étant donné un code de calcul, dépendant d'un très grand nombre de paramètres (mettons 50), que peut-on dire de l'ensemble des résultats possibles, lorsqu'un petit nombre de runs seulement ont été faits ? Si on a effectué 300 runs, et si tous indiquent une température inférieure à un seuil de sûreté, peut-on conclure que tous les résultats respecteront ce seuil ? Ce nombre très faible de 300 est-il représentatif ?

L'EPH fonctionne de la manière suivante : tout point où une mesure a été faite envoie une information, sous forme probabiliste, en tout point de l'espace de configuration, exactement comme une masse rayonne un champ gravitationnel en tout point de l'univers. Ce champ se dilue à mesure que l'on s'éloigne. La construction est faite avec un principe d'entropie maximale, c'est-à-dire qu'aucune hypothèse factice n'est jamais faite. Le résultat est une loi de probabilité, plus ou moins diffuse, en tout point de l'espace des configurations. On peut trouver le détail de la théorie dans le travail de Olga Zeydina [7]. Différentes applications ont été faites (AEE, épidémiologie, etc.) et les résultats sont, pour le moment, plutôt satisfaisants.

Références

- [1] André Aurengo : La médecine doit imposer la rigueur aux risques hypothétiques. *La Jaune et la Rouge*, février 2008, pp. 32-35.
- [2] Bernard Beauzamy : Méthodes probabilistes pour l'étude des phénomènes réels. *Editions de la SCM*, 2004.
- [3] Bernard Beauzamy et Olga Zeydina : Méthodes probabilistes pour la reconstruction de données manquantes. *Editions de la SCM*, 2007.
- [4] Pierre Funk : Contrôle des matières nucléaires : vers une réglementation plus efficace. *La Jaune et la Rouge*, février 2008, pp. 36-37.
- [5] Anne-Laure Weber, Anne Karcher, Nicolas Pépin, Frédéric Huynh, Pierre Funk (IRSN), Laure Le Brize, Olga Zeydina, Bernard Beauzamy (SCM SA), Implementation of an experimental design to evaluate the codes used to determine the enrichment of uranium samples. Paper presented by IRSN and SCM at the "*European Safeguards Research and Development Association*" meeting, May 2007.
- [6] Olga Zeydina : L'Hypersurface Probabiliste, Construction Générale et Applications. Rapport no 4 adressé à l'*Institut de RadioProtection et de Sécurité Nucléaire, Direction de la Sécurité des Réacteurs*, en application de la commande R50/11026029 du 29 novembre 2006 (voir http://www.scmsa.com/RMM/RMM_EPH.htm).