Mouvement en présence d'une force centrale

Bernard Beauzamy

01/05/2015

d'après Richard Feynman

On s'intéresse au mouvement d'un mobile dans un plan, sous la seule hypothèse que, en tout instant, il est soumis à une force constamment dirigée vers un même point (noté S, comme "Soleil"). La force peut être d'intensité variable.

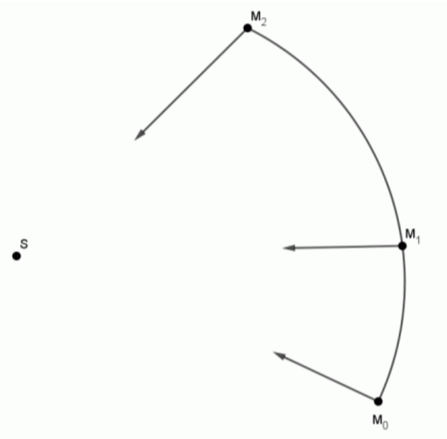


Figure 1 : Mouvement en présence d'une force centrale

Nous allons voir qu'un raisonnement très simple "à la Archimède" permet de retrouver les lois de la physique.

Proposition 1. - *En présence d'une force centrale, même si celle-ci varie avec le temps, le rayon vecteur* SM *balaye des aires égales en des temps égaux.*

Ceci est la seconde loi de Kepler, mais on ne fait aucune hypothèse sur la valeur de la force, d'un point de vue quantitatif (ce n'est pas nécessairement la gravitation) ; on demande seulement qu'elle soit toujours orientée vers un point central.

Démonstration de la Proposition

Après discrétisation, pour démontrer notre assertion, il suffit de montrer que les aires de deux triangles sont égales : les aires des triangles SM_0M_1 et SM_1M_2 dans la figure ci-dessous.

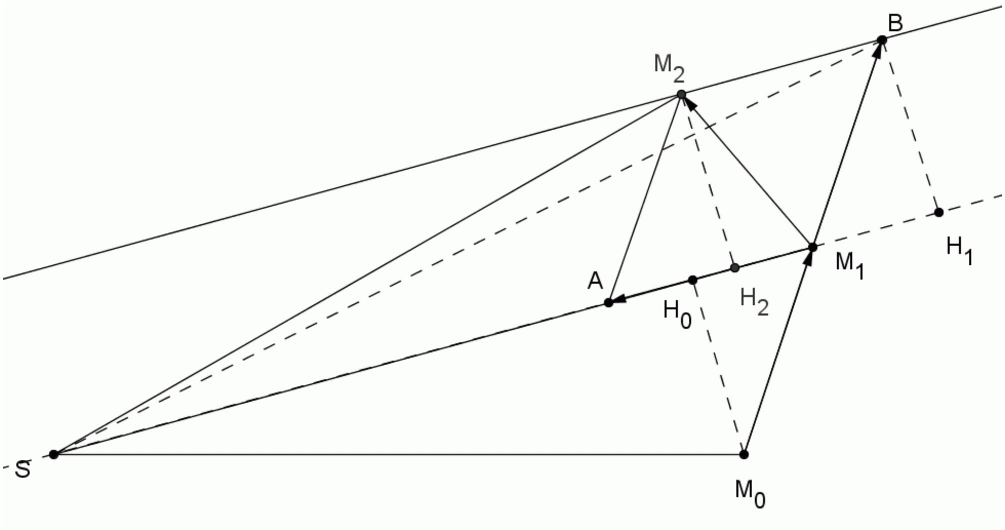


Figure 2 : discrétisation du mouvement

Pendant un petit intervalle de temps t, la planète, initialement en M_0, parcourt le segment M_0M_1 et se retrouve en M_1.

Nous définissons le point B : position qu'occuperait la planète au bout d'un second intervalle de temps t, si elle poursuivait sa course en ligne droite ($M_0M_1 = M_1B$).

Nous définissons le point A : position qu'occuperait la planète au bout d'un second intervalle de temps t, si elle s'était trouvée immobile en M_1 et soumise à la force centrale dirigée vers S.

Lemme 2. – *La position de la planète au bout du second intervalle de temps sera le point M_2, obtenu comme somme vectorielle : $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_1A} + \overrightarrow{M_1B}$.*

Démonstration du Lemme 2

La loi fondamentale de la dynamique s'écrit $\vec{F} = m\vec{\gamma}$; comme $\vec{F}$ en M_1 est dirigée vers S, $\vec{\gamma}$ sera aussi dirigé vers S. L'équation du mouvement s'écrit, au moment où la planète est en M_1 :

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\vec{\gamma}t^2 + \overrightarrow{V_0}t$$

Or : $\overrightarrow{V_0}t = \overrightarrow{M_1B}$ correspond au mouvement de la planète sans force centrale (mouvement dû à la seule inertie) ; $\frac{1}{2}\vec{\gamma}t^2 = \overrightarrow{M_1A}$ correspond au mouvement de la planète si elle était soumise à la seule force centrale et était initialement immobile en M_1. Ceci prouve le lemme 2.

Remarque. – Ce lemme dit que la position de la planète s'obtient en additionnant deux vecteurs : l'un correspond au mouvement uniforme, en l'absence de force centrale ; l'autre correspond au mouvement dû à la force centrale, comme si la planète était initialement immobile. Un tel énoncé n'est jamais donné dans l'enseignement, où l'on parle uniquement de l'addition de forces.

Pour montrer notre assertion, nous devons montrer maintenant que les triangles SM_0M_1 et SM_1M_2 ont même aire.

Lemme 3. – *Les triangles SM_0M_1 et SM_1B ont même aire.*

Démonstration du lemme 3

Soient respectivement H_0 et H_1 les projections de M_0 et B sur la droite SM_1 ; puisque $M_1M_0 = M_1B$, il est évident que les longueurs M_0H_0 et BH_1 sont égales. Il en résulte que les deux triangles SM_0M_1 et SM_1B ont même aire, puisqu'ils ont même base (à savoir SM_1) et des hauteurs égales. Ceci prouve le lemme 3.

Pour achever la démonstration de la proposition, il suffit maintenant de montrer que les triangles SM_1B et SM_1M_2 ont même aire. Mais ceci est évident : ils ont même base (à savoir SM_1) et des hauteurs égales : $M_2H_2 = BH_1$ puisque BM_2 est parallèle à SM_1. Ceci prouve la Proposition 1.

Remarque. – Si la force change, le point A se déplace sur le segment SM_1, mais la base SM_1 et la hauteur H_2M_2 restent inchangées ; le triangle SM_1M_2 conserve donc la même aire.

Cas d'un mouvement circulaire uniforme

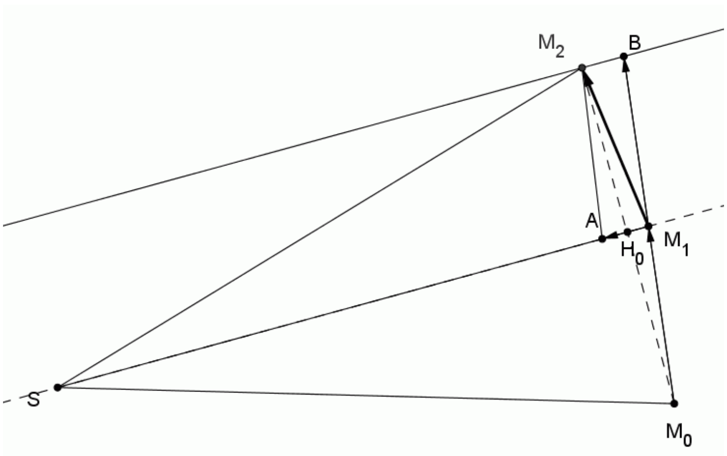
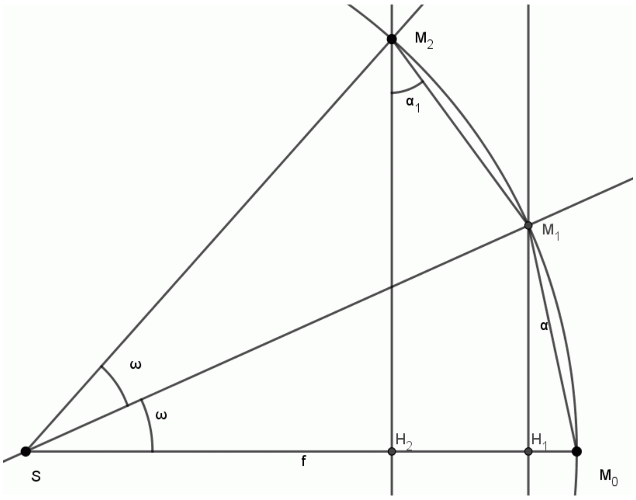


Figure 3 : cas d'un mouvement circulaire uniforme

La figure se simplifie : les triangles SM_0M_1 et SM_1M_2 sont isocèles et égaux, puisque $SM_0 = SM_1 = SM_2$. Il en résulte que les deux pieds de hauteur H_0 et H_2 sont confondus.



Notons α l'angle $H_1M_1M_0$ et α_1 l'angle $H_2M_2M_1$; des considérations élémentaires d'angle dans les triangles correspondants donnent les relations : $\alpha = \frac{\omega}{2}$, $\alpha_1 = \frac{3\omega}{2}$. La vitesse pendant le premier laps de temps est $\vec{V}_1 = \frac{\overrightarrow{M_0M_1}}{t}$ et pendant le second $\vec{V}_2 = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{t}$. Le module de la vitesse est $V = R\omega$, où $R = SM_0 = SM_1 = SM_2$. L'accélération est :

$\vec{\gamma} = \frac{\vec{V_1} - \vec{V_0}}{t}$; sa composante sur l'axe SM_0 est $V\left(\sin\left(\frac{3\omega}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega}{2}\right)\right) \approx V\omega = \frac{V^2}{R}$.