



Jeu Concours Mathématique 2012-2013

Les moyens de lutte contre l'incendie en Sibérie

Fédération Française des Jeux Mathématiques

et

Société de Calcul Mathématique SA

en partenariat avec :

La Brigade des Sapeurs Pompiers de Paris

rédaction : Bernard Beauzamy

I. Présentation des Jeux

Les "Jeux Mathématiques" organisés conjointement par la FFJM et la SCM existent depuis quatre ans ; les précédents ont été :

- En 2008-2009, conception d'un réseau de bus dans une ville, en partenariat avec Veolia Transport ;
- En 2009-2010, conception d'un réseau de distribution d'électricité, en partenariat avec RTE ;
- En 2011-2012, recherche du meilleur itinéraire par un automobiliste, en partenariat avec le journal Auto Plus.

Ils concernent la résolution d'un problème "de société" (c'est-à-dire qui intéresse tout le monde), mais simplifié pour les besoins de la résolution. Celle-ci demande néanmoins plusieurs mois de travail. Les candidats peuvent concourir individuellement ou par groupes (typiquement, des classes ou des groupes d'étudiants, qui font ainsi un mémoire de stage, d'étude, ou de recherche).

Deux catégories de prix sont décernées :

Prix "individuels" :

Pour le vainqueur : 500 Euros

Pour le second : 200 Euros

Pour les trois suivants : 100 Euros chacun.

Prix "classes" :

Pour le vainqueur : 500 Euros

Pour le second : 200 Euros

Pour les trois suivants : 100 Euros chacun.

Le montant total des prix est donc de 2 000 Euros.

Les meilleures solutions sont publiées sur le site web de la FFJM, sur celui de la SCM et sur ceux de nos partenaires.

La proclamation officielle des résultats et la remise des prix se font dans le cadre du Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques, qui se tient chaque année à Paris au mois de mai.

Les vainqueurs des prix précédents ont bénéficié d'une notoriété considérable, dans la presse écrite et la télévision de leurs pays.

II. Le Prix 2012-2013

A. Présentation générale du sujet

Il s'agit d'une aide à la décision, au profit d'un gouvernement : lui permettre de répartir au mieux ses moyens de lutte contre l'incendie. La difficulté tient au fait que, comme c'est toujours le cas dans la vie réelle, les données nécessaires ne sont pas connues avec précision ; tout au plus dispose-t-on d'informations approximatives.

A la différence des précédents jeux-concours, où le territoire était donné sous forme simplifiée (un carré), ici nous avons un territoire réel, dans son étendue et sa complexité. Il s'agit en outre d'un problème qui préoccupe effectivement tous les gouvernements : il est d'actualité, chaque année, dans tous les pays.

Le problème se présente sous sa forme la plus directe, celle qui se rencontre en pratique : on dispose de moyens globaux, fixés, consacrés à la lutte contre l'incendie. Il s'agit de faire en sorte de les utiliser au mieux. En termes usuels, nous dirons qu'il s'agit de faire en sorte que les incendies causent le moins de dégâts possible. On ne cherche pas à empêcher les incendies (ce n'est pas possible, en pratique), mais uniquement à en limiter l'extension. En termes mathématiques, il s'agit de minimiser l'espérance du coût des dégâts, par la meilleure utilisation possible des moyens de lutte dont on dispose.

B. L'exemple de travail

Le territoire concerné sera la Sibérie, territoire extrêmement vaste (13 millions de km²) et peu peuplé, ce qui pose des difficultés particulières.

1. Géographie

La Sibérie s'étend approximativement de 60° à 185° dans le sens Ouest-Est ; le territoire est décomposé en 25 fuseaux numérotés de A à Y ; chaque fuseau a une largeur de 5°.

Elle s'étend de 50° à 75° dans le sens Sud-Nord ; la décomposition est de 6 bandes parallèles, chacune représentant 5°. Les bandes sont numérotées de 1 à 6, en partant du Nord.

Les mailles sont donc des "trapèzes" de 5° x 5°. Voir carte ci-dessous.



Remarque importante : le découpage en "mailles" n'est certainement pas neutre pour la résolution du problème. Il serait souhaitable, mathématiquement parlant, que les mailles soient les plus fines possible. Mais en pratique, ce n'est pas possible : on ne dispose pas d'informations suffisamment détaillées. Le choix que nous adoptons est un compromis.

Chaque maille va être caractérisée par :

- la proportion de surface urbanisée, notée U ;
- la proportion de surface cultivée : champs, prairies, cultures diverses, arbres fruitiers, etc., notée C ;
- la proportion de surface restée vierge : toundra, forêts, etc. Elle est notée V et vaut $V = 100 - U - C$.

Il est évident en effet que la probabilité de départ d'un incendie n'est pas la même selon l'occupation des sols.

Les chiffres sont donnés, pour chaque maille, dans les tableaux Excel joints. Seules les valeurs de U et C y figurent ; elle sont données en pourcentage (3 signifie 3% de la sur-

face de la zone). La valeur de V est $V = 100 - U - C$. Attention : la surface d'une maille dépend de sa latitude !

On ne cherche pas à cartographier les différents types d'occupation des sols à l'intérieur de chaque maille ; seule la proportion est connue.

2. Naissance et propagation d'un incendie

Pour chacun des trois types d'occupation (urbain, cultivé, vierge), on connaît la probabilité de naissance d'un incendie, par jour. Elle est donnée par les formules suivantes :

- Si le pourcentage de zone urbanisée est $\geq 20\%$, la probabilité de naissance d'un incendie est $p_1 = 2 \times 10^{-5}$ par km² et par jour ;
- Si le pourcentage de zone urbanisée est $< 20\%$ et le pourcentage de zones cultivées est $\geq 20\%$, la probabilité est $p_2 = 0.5 \times 10^{-5}$ par km² et par jour ;
- Dans tous les autres cas, la probabilité est $p_3 = 10^{-6}$ par km² et par jour.

Ceci concerne une saison donnée, en l'occurrence l'été. Plus précisément, on se fixe une période de six mois, du 1^{er} avril au 30 septembre. On travaille exclusivement sur cette période. Il est habituel que la répartition des moyens de lutte diffère selon les saisons.

L'incendie peut prendre naissance en n'importe quel point de la maille, avec probabilité uniforme sur toute la maille. Les incendies apparaissent indépendamment les uns des autres.

On admettra que la détection d'un incendie se fait de manière immédiate, ainsi que sa localisation, qui est précise (ce qui n'est certainement pas vrai en pratique ; il en résulte une difficulté supplémentaire dont nous ne tenons pas compte ici).

Une fois que l'incendie s'est déclaré, il se propage. On admettra (ce qui est certainement inexact) que la propagation se fait partout à la même vitesse, qui est de 2 km par heure. La propagation se fait en cercle, dont le rayon s'étend à partir du point initial.

Le coût de destruction est au prorata de la surface brûlée. Par mètre carré incendié, on prendra les coûts suivants :

Zone urbaine : 40 roubles

Zone cultivée : 4 roubles

Zone vierge : 0,4 roubles.

Les zones ayant brûlé sont considérées comme pouvant brûler à nouveau.

3. Les secours

L'objectif du jeu-concours est de répartir les moyens de lutte. Ces moyens consistent en des pompiers au sol et des avions bombardiers d'eau.

– Moyens au sol

Une brigade au sol comporte 30 pompiers et 3 véhicules. La Sibérie dispose au total de 5 000 brigades (donc 150 000 personnes, 15 000 véhicules).

Chaque véhicule emporte 6 000 litres d'eau, quantité suffisante pour éteindre 1 000 m², après quoi il doit se ravitailler.

La vitesse moyenne des véhicules est 40 km/h. La consommation de gas-oil est de 30 l/100 km, et le prix d'un litre de gas-oil est de 30 roubles. On admettra que les véhicules peuvent trouver un ravitaillement en gas-oil n'importe où.

Compte tenu de l'abondance des lacs et rivières en Sibérie, on admettra que, où que soit l'incendie, la distance à parcourir pour le ravitaillement en eau est de 100 km (dans chaque sens). L'eau est gratuite, il n'y a pas d'installations spécifiques et le délai de remplissage n'est pas pris en compte.

– Moyens aériens

La Sibérie dispose de 100 avions de lutte contre l'incendie, de types divers (IL 62, BE 200, hélicoptères, etc.)

On admettra les données moyennes suivantes :

- chaque avion se déplace à la vitesse de 300 km/h ;
- emporte 4 800 litres de kérosène ;
- dispose d'une autonomie de vol de 2 400 km (consommation 2 litres par km)
- emporte une quantité d'eau de l'ordre de 6 000 litres, suffisante pour éteindre 1000 m² (0.1 ha), après quoi il doit rejoindre un point de ravitaillement en eau.

Pour se ravitailler en kérosène, l'avion doit rejoindre sa base, au centre de la maille, ou bien un autre centre de maille, s'il est plus proche.

Compte tenu de l'abondance des lacs et rivières en Sibérie, on admettra que, où que soit l'incendie, la distance à parcourir pour le ravitaillement en eau est de 100 km (dans chaque sens).

Le carburant est du kérosène, à raison de 30 roubles le litre, comme précédemment.

4. Position des moyens de secours

On admettra que, dans chaque maille, les moyens de secours sont positionnés au point central de la maille, que ce soit pour les moyens au sol ou pour les avions.

5. Eteindre un incendie

L'incendie se propage en un cercle dont le rayon va croissant à la vitesse de 2 km/h, soit 0,56 m/s, comme expliqué plus haut, mais la zone active ne fait que 10 m de largeur (le centre du cercle a déjà brûlé ; seule une couronne périphérique est enflammée). La superficie de la zone active (qu'il faut éteindre) est donc approximativement :

$$S \approx 2\pi\delta vt$$

où δ est la largeur de la couronne active (10 m), v est la vitesse de propagation de l'incendie (0,56 m/s), t est le temps écoulé depuis la naissance de l'incendie.

On admet que, pour éteindre l'incendie, il faut recouvrir la zone active d'une hauteur $h = 0,6$ cm d'eau. Il faut donc 6 litres d'eau au mètre carré ; la quantité d'eau nécessaire pour éteindre l'incendie est donc approximativement, au temps t :

$$Q(t) \approx 2\pi \delta v h t$$

Extinction partielle : si on déverse une quantité d'eau insuffisante, une partie de la couronne active continue à brûler. On connaît la quantité d'eau déversée à l'instant t , la taille de la couronne à cet instant, et on peut donc calculer la superficie restant active. On assimilera cette superficie à une couronne plus petite de même superficie. En d'autres termes, tout se passe comme si un déversement partiel "contractait" l'incendie, en le ramenant à une situation antérieure.

Déversements : l'eau déversée le sera toujours au point central, point de naissance de l'incendie. La propagation a une importance quant à la taille de la zone brûlée, mais elle n'affecte pas significativement les déplacements des secours (un déplacement de 2 km est négligeable à l'échelle de la Sibérie). On admettra donc que :

- les secours doivent toujours rejoindre le point de naissance de l'incendie ;
- c'est là qu'ils déversent la totalité de l'eau dont ils disposent.

Si l'eau est en quantité insuffisante, les secours doivent s'approvisionner et reviennent au point central de l'incendie, qui s'est "contracté" du fait des déversements déjà réalisés.

Les secours d'une maille peuvent intervenir sur une autre maille. La distance est celle calculée à la surface de la Terre (qui, à cette échelle, n'est pas plate, mais sphérique, avec un rayon d'environ 6 370 km).

Comme déjà dit, la "réparation" est immédiate : une zone qui a brûlé peut brûler à nouveau.

6. Le problème

Le problème est de répartir l'ensemble des moyens de lutte, entre les différentes zones, pour minimiser l'espérance du coût total de destruction. Une fois cette répartition optimale réalisée, on demande de répondre aux questions complémentaires suivantes :

- Question 1 : quelle sera l'espérance du coût total des destructions ?
- Question 2 : quelle est l'espérance du budget total "consommables" (gas-oil pour les camions, kérosène pour les avions) ?
- Question 3 : quelle est la probabilité que les moyens de lutte soient insuffisants ?

III. Commentaires

Les participants seront amenés à faire des hypothèses complémentaires, sur différents aspects ; toutes les hypothèses sont acceptables à condition d'être plausibles et explicitement énoncées.

Beaucoup d'ouvrages, traitant des probabilités, ont une présentation satisfaisante en ce qui concerne les fondements axiomatique, mais les applications aux situations réelles ne sont pas claires, et sont même parfois contradictoires. L'ouvrage de référence ici sera :

Bernard Beauzamy : Méthodes Probabilistes pour l'étude des phénomènes réels. Ouvrage édité par la Société de Calcul Mathématique SA, ISBN 2-9521458-0-6, ISSN 1767-1175, mars 2004.

IV. Règles de participation

Le jeu débutera le 1^{er} novembre 2012 et se terminera le 30 avril 2013 ; remise des prix en mai 2013, lors du Salon des Jeux Mathématiques à Paris.

Les participants doivent adresser leur solution, au format pdf, en français ou en anglais, au plus tard le 30 avril 2013, à l'adresse ffjm@wanadoo.fr

V. Collaboration Internationale

Le présent "jeu-concours" s'inscrit dans un projet de collaboration que la SCM a avec le Gouvernement de l'Oblast de Novosibirsk, à propos des risques naturels. Ce projet a reçu l'appui de l'Ambassade de France à Moscou.