

Jeu Concours Mathématique 2011-2012

Choix du meilleur itinéraire par un automobiliste

Fédération Française des Jeux Mathématiques

et

Société de Calcul Mathématique SA

en partenariat avec le journal Auto Plus

I. Présentation des Jeux

Les "Jeux Mathématiques" organisés conjointement par la FFJM et la SCM existent depuis trois ans ; les précédents ont été :

- En 2008-2009, conception d'un réseau de bus dans une ville, en partenariat avec Veolia Transport ;
- En 2009-2010, conception d'un réseau de distribution d'électricité, en partenariat avec RTE.

Ils concernent la résolution d'un problème "de société" (c'est-à-dire qui intéresse tout le monde), mais simplifié pour les besoins de la résolution. Celle-ci demande néanmoins plusieurs mois de travail. Les candidats peuvent concourir individuellement ou par groupes (typiquement, des classes ou des groupes d'étudiants, qui font ainsi un mémoire de stage, d'étude, ou de recherche).

Deux catégories de prix sont décernées :

Prix "individuels" :

Pour le vainqueur : 500 Euros

Pour le second : 200 Euros

Pour les trois suivants : 100 Euros chacun.

Prix "classes" :

Pour le vainqueur : 500 Euros

Pour le second : 200 Euros

Pour les trois suivants : 100 Euros chacun.

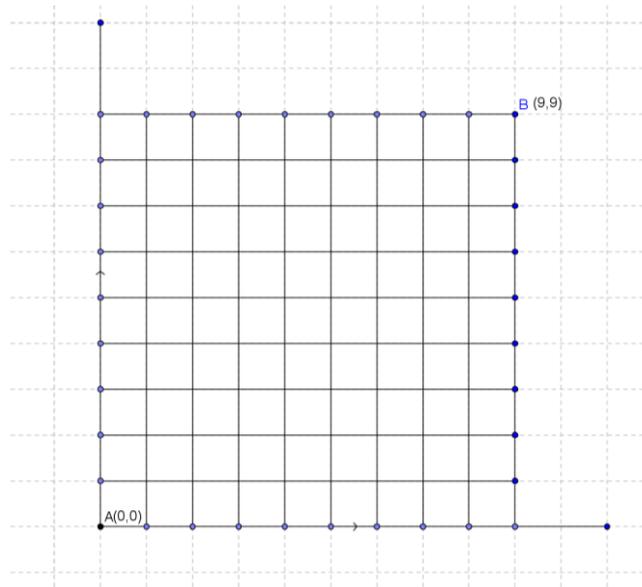
Le montant total des prix est donc de 2 000 Euros.

Les meilleures solutions sont publiées sur le site web de la FFJM, sur celui de la SCM et sur ceux de nos partenaires.

La proclamation officielle des résultats et la remise des prix se font dans le cadre du Salon de la Culture et des Jeux Mathématiques, qui se tient chaque année à Paris au mois de mai. Voir le Règlement du Jeu-Concours, joint.

II. Le Prix 2011-2012

Il faut choisir le "meilleur" itinéraire pour se rendre d'une ville A à une ville B, sur une carte simplifiée représentée par un quadrillage constitué de dix lignes verticales et dix lignes horizontales ; A se situe en bas à gauche et B en haut à droite :



On ne peut se déplacer que sur les lignes du quadrillage ; les tronçons élémentaires, appelés "segments", sont tous de même longueur, à savoir 100 km. La distance à parcourir pour aller de A à B est donc au minimum de 1 800 km. Le véhicule est le même pour tout le monde ; seul le trajet est à déterminer.

L'axe des abscisses est orienté de gauche à droite et l'axe des ordonnées de bas en haut (comme habituellement). Le point A a donc pour coordonnées $(0,0)$ et le point B $(9,9)$.

Chaque segment sera repéré par les coordonnées du point de départ et :

- la lettre V (pour vertical) ; le segment est alors considéré comme orienté de bas en haut ;
- la lettre H (pour horizontal) ; le segment est alors considéré comme orienté de gauche à droite.

Ainsi, le segment $(3,4,V)$ va du point $(3,4)$ au point $(3,5)$; le segment $(5,7,H)$ va du point $(5,7)$ au point $(6,7)$.

Il y a des limitations de vitesse sur chaque segment, et elles diffèrent d'un segment à l'autre ; ces limitations sont indiquées dans les tableaux joints. Ces limitations ne peuvent être que 50, 90, 110, 130 km/h.

Sur les trajets limités à 130 km/h, il y a un péage, fixé arbitrairement à 3 Euros par segment.

Il y a par ailleurs deux types de coût :

- L'un est lié au temps passé (hôtel, restaurant, etc.) ; il sera donné par la formule $c_1 = 5t$, où c_1 est exprimé en euros et t en heures ;
- Le second coût est lié à la consommation du véhicule, qui est donnée en fonction de la vitesse, par une formule simplifiée unique :

$$conso = av + b$$

où *conso* est la consommation en litres, v est la vitesse en km/h ; les coefficients a, b valent respectivement :

$$a = 0,0625, b = 1,875$$

Le coût du carburant sera fixé arbitrairement et de manière simplifiée à 1,3 Euro/litre.

A. Problème 1 (déterministe)

Le véhicule respecte constamment toutes les limites de vitesse. Déterminer le (ou les) trajet(s) de temps minimal et le (ou les) trajet(s) de coût minimal.

B. Problème 2 (probabiliste)

Certains automobilistes, peu soucieux des lois et règlements, ne respectent pas les limites de vitesse.

Le Gouvernement, pour leur imposer le respect des règlements (et aussi, accessoirement, pour récupérer quelques amendes), installe des radars. Il y a deux types de radars :

- Les radars fixes, qui sont installés sur des segments connus. Il y a 20 radars fixes au total, positionnés sur les segments suivants :

(0,8,V) ; (1,2,V) ; (1,4,V) ; (2,0,V) ; (3,5,V) ; (5,3,V) ; (5,8,V) ; (7,2,V) ; (9,2,V) ; (9,5,V)
 (3,0,H) ; (8,1,H) ; (2,2,H) ; (5,3,H) ; (3,4,H) ; (0,5,H) ; (4,6,H) ; (4,7,H) ; (0,8,H) ; (7,9,H)

(ces informations se retrouvent dans le tableau Excel joint)

- Des radars mobiles, au nombre de 20 également. Par convention, chaque radar peut se trouver n'importe où, c'est-à-dire sur n'importe quel segment, avec équiprobabilité. On peut même trouver plusieurs radars mobiles sur un même segment, et un ou plusieurs radars mobiles sur un segment où il y a un radar fixe : le Gouvernement les met vraiment n'importe où.

Un radar couvre la totalité d'un segment et on admet que la vitesse du véhicule reste constante sur chacun des segments.

Sur n'importe quel segment, pour les radars fixes comme pour les radars mobiles, la règle de détection est la suivante :

- Si le véhicule dépasse la vitesse limite de plus de 10 %, il sera détecté avec probabilité 0,7 et encourt une amende de 100 Euros ;

- Si le véhicule dépasse la vitesse limite de plus de 50 %, il sera détecté avec la probabilité 0,9 et encourt une amende de 200 Euros.

Soit T_0 le temps minimal déterminé au paragraphe A (temps légal, obtenu en respectant les limites de vitesse). Un conducteur pressé voudrait faire le trajet en temps $\leq 0,8 T_0$. Il encourt alors des amendes. La question est : quel(s) trajet(s) minimise(nt) l'espérance du coût total du trajet, pénalités incluses, et quelle est la valeur de cette espérance ?

Attention : la question porte sur le choix d'un itinéraire a priori, compte-tenu des informations données ci-dessus. Le conducteur cherche, avant son voyage, à déterminer l'itinéraire le plus favorable ; le critère choisi est la minimisation de l'espérance du coût, pénalités incluses. La question ne porte pas sur le coût effectif du voyage, qui est nécessairement probabiliste.

III. Commentaires

L'exercice correspond à une vraie préoccupation des usagers (temps minimal et coût minimal), tout en insistant bien sur le fait que l'information disponible est probabiliste.

Le problème est très complexe, parce qu'il y a un très grand nombre de trajets possibles. Si on se limite aux itinéraires de longueur minimale (cette longueur est de 18 segments), ils sont au nombre de $\binom{18}{9} = 48\,620$; mais un itinéraire plus long en distance peut se révéler plus court en temps.

Beaucoup d'ouvrages, traitant des probabilités, ont une présentation satisfaisante en ce qui concerne les fondements axiomatique, mais les applications aux situations réelles ne sont pas claires, et sont même parfois contradictoires. L'ouvrage de référence ici sera :

Bernard Beauzamy : Méthodes Probabilistes pour l'étude des phénomènes réels. Ouvrage édité par la Société de Calcul Mathématique SA, ISBN 2-9521458-0-6, ISSN 1767-1175, mars 2004.