Société de Calcul Mathématique, S. A.
Algorithmes et Optimisation

A l'occasion du 2222ème anniversaire de la mort d'Archimède

Séminaire exceptionnel

Un théorème d'Archimède et sa démonstration d'origine

par Bernard Beauzamy

Un théorème dû à Archimède dit que la surface de toute sphère vaut quatre fois la surface de son grand cercle.

mercredi 5 mai 2010

Siège social et bureaux : 111, Faubourg Saint Honoré, 75008 Paris. Tel : 01 42 89 10 89. Fax : 01 42 89 10 69. www.scmsa.com
Société Anonyme au capital de 56 200 Euros. RCS : Paris B 399 991 041. SIRET : 399 991 041 00035. APE : 7219Z

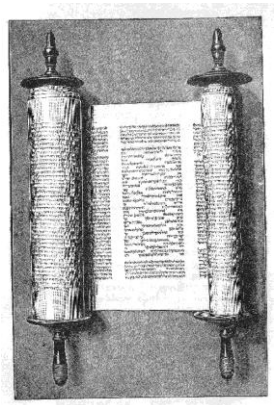
I. Historique

Le théorème que nous présentons est extrait d'une lettre d'Archimède à son ami Dosithée ; la date précise est inconnue. Cette lettre contient un ensemble de résultats, regroupés sous le titre "De la sphère et du cylindre".

On le trouve sur Internet : http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/table.htm

La lettre, à l'origine, était faite d'une feuille de papyrus : *"Le principe de fabrication du papier de papyrus réside dans la superposition de fines tranches de la tige de la plante, humidifiées, placées en couches et positionnées perpendiculairement les unes sur les autres et compressées. Normalement, seul un côté du papier était utilisé, sur lequel un traitement à base de colle était appliqué afin d'éviter que l'encre ne coule. Chaque morceau ne dépassait pas un demi-mètre de longueur, mais on pouvait assembler de nombreuses feuilles les unes aux autres, pour former de longs rouleaux"* (Wikipedia).

On écrivait en colonnes étroites et on déroulait au fur et à mesure de la lecture ; ci-contre, des rouleaux de la Torah.



Archimède écrivait dans le dialecte dorique, assez proche du grec ancien. Les lettres étaient toutes en majuscule, sans espace ni ponctuation entre les mots.

La lettre était ensuite confiée à un bateau qui l'acheminait jusqu'à son destinataire ; la poste existait à cette époque. On ignore l'adresse de Dosithée.

Entre le 1er et le 4ème siècle après JC sont apparus des codex. "*Le codex est un livre de forme parallélépipédique, résultat de l'assemblage de manuscrits en parchemin (peau d'animal). Sa caractéristique principale est la reliure des feuillets qui le constituent par la marge*" (Wikipedia).

Eutocius, né en Palestine en 480 après JC fait préparer une édition des œuvres complètes d'Archimède, avec ses commentaires.

Isidore de Milet, au 6ème siècle, est un architecte connu pour l'érection de la cathédrale Sainte Sophie à Constantinople ; il s'est inspiré des travaux d'Archimède pour les plans. Il a fait copier "De la sphère et du cylindre" par un étudiant.

Au 9ème siècle, les diverses lettres d'Archimède, réunies en trois codex, désignés par les lettres A, B et C, ont été recopiées en minuscules sur des parchemins de taille 30 cm x 19,5 cm. Le livre "De la sphère et du cylindre" fait partie du Codex A.

En 1265, traduction du grec en latin par Guillaume de Moerbeke, Frère Franciscain, en Italie.

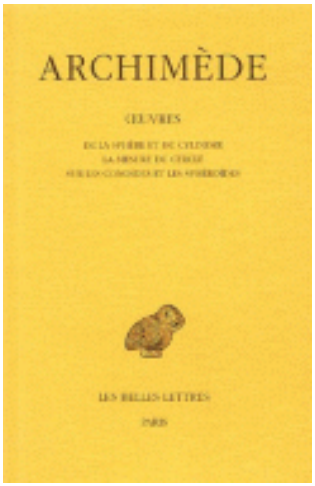
En 1450, le codex A appartient au Pape Nicolas V, qui en fait faire une nouvelle traduction (du grec en latin) par Jacques de Crémone.

En 1492, Laurent de Médicis, dit Laurent le Magnifique, demande à Politien de retrouver le codex A. Il est retrouvé dans la bibliothèque de Giorgio Valla, et une copie en est faite.

En 1544, première édition des œuvres complètes d'Archimède à Bâle.

1564 : le codex A est perdu.

Note : le codex B est également perdu ; le codex C est le "palimpseste" d'Archimède, récemment retrouvé et restauré.



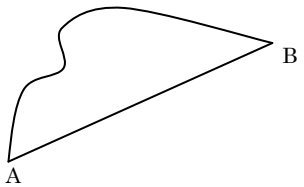
Nous avons travaillé sur l'édition Archimède, Œuvres, T. I : De la sphère et du cylindre. - La Mesure du cercle. - Sur les conoïdes et les sphéroïdes, Texte établi et traduit par Ch. Mugler. 2e tirage 2003, Edition "Les Belles Lettres". Texte en français et en grec.

II. Eléments mathématiques

Dans tout ce qui suit, nous retraçons très fidèlement la progression logique suivie par Archimède, avec son vocabulaire et son déroulement d'origine, sans aucune altération. Nous avons simplement modifié les notations et l'écriture des équations, pour les rendre lisibles aux habitudes modernes. A certains endroits, nous avons estimé que la démonstration d'origine pouvait être simplifiée : nous expliquons précisément en quoi elle consistait et en quoi consiste la simplification.

Postulat 1

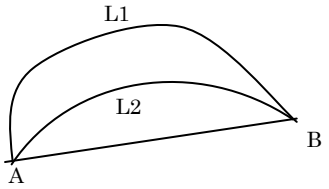
De toutes les courbes ayant mêmes extrémités, la plus courte est la ligne droite.



Postulat 2

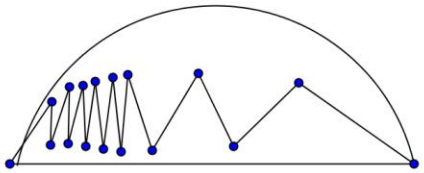
On rappelle qu'un ensemble est convexe si, lorsqu'il contient deux points, il contient le segment qui les réunit.

Soient deux courbes L_1 et L_2 ayant mêmes extrémités A et B. Soit E_1 l'ensemble limité par la courbe L_1 et le segment AB et de même soit E_2 l'ensemble limité par la courbe L_2 et le segment AB. Si les deux ensembles E_1 et E_2 sont convexes, et si E_2 est contenu dans E_1, alors la longueur de L_2 est inférieure à celle de L_1.



Remarque (BB)

L'hypothèse de convexité est essentielle. Dans la figure ci-contre, on voit deux ensembles, l'un inclus dans l'autre ; ils ont un même segment pour frontière commune, mais la frontière du plus petit ensemble est beaucoup plus longue que la frontière du grand.



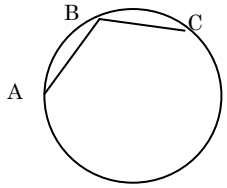
Postulat 3 (variante du 1, en trois dimensions)

Parmi toutes les surfaces qui ont la même courbe frontière, si cette courbe est située dans un plan, la surface d'aire minimale est la portion de plan.

Postulat 4 (variante du 2, en trois dimensions)

Soient deux ensembles convexes C_1 et C_2 ayant une frontière commune dans un plan ; si C_1 contient C_2 , alors l'aire de C_1 est supérieure à celle de C_2.

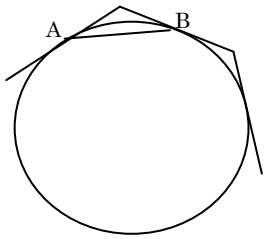
Lemme 1. – *Si un polygone est inscrit dans un cercle, la longueur du polygone est inférieure à celle du cercle.*



Démonstration du lemme 1

Il suffit d'appliquer le postulat 1, séparément, à chaque arc AB et à la corde correspondante.

Lemme 2. – *Si un polygone est circonscrit à un cercle, la longueur du polygone est supérieure à celle du cercle.*



Démonstration du lemme 2

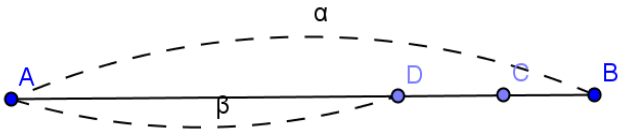
Il suffit d'appliquer le postulat 2 entre deux points de contact A et B entre le polygone et le cercle. Les deux ensembles obtenus sont convexes et la portion du polygone entre A et B a une longueur plus grande que l'arc de cercle.

Lemme 3. – *Soient α et β deux grandeurs avec $\alpha > \beta > 0$. On peut trouver deux segments AB et AC tels que*

$$1 < \frac{AB}{AC} < \frac{\alpha}{\beta}$$

Démonstration du lemme 3 (simplification de la démonstration d'Archimède)

Soit AB un segment tel que $AB = \alpha$ et soit D le point du segment AB tel que $AD = \beta$. Soit C le milieu de B et D. Alors :



$$1 < \frac{AB}{AC} < \frac{AB}{AD} = \frac{\alpha}{\beta}$$

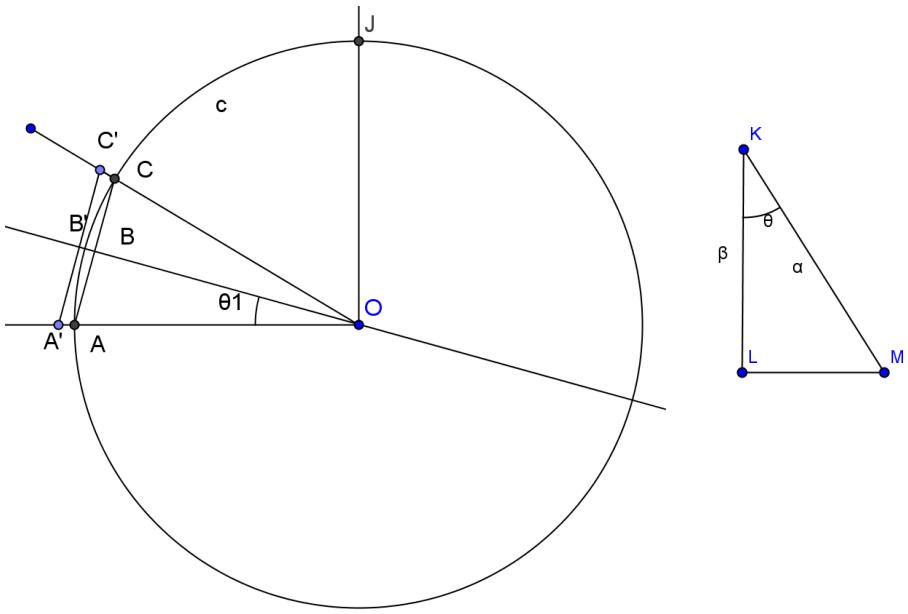
Lemme 4. – *Soient deux grandeurs α et β avec $\alpha > \beta > 0$ et soit un cercle $\mathcal{C}$. On peut trouver deux polygones P_i et P_e, respectivement inscrit et circonscrit au cercle, tels que :*

$$1 < \frac{l(P_e)}{l(P_i)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

où $l(P)$ désigne la longueur du polygone P. De plus, ces deux polygones seront réguliers et auront un nombre pair de côtés.

Démonstration du lemme 4

Commençons par reporter les grandeurs α et β de manière à former un triangle rectangle KLM comme ci-dessous :



Nous bissectons l'angle droit AOJ un nombre suffisant de fois pour que l'angle θ_1 soit inférieur à l'angle θ. Nous traçons les segments AC (milieu B) et A'C' (milieu B'), qui seront respectivement les côtés des polygones inscrits et circonscrits au cercle.

Comme $\theta_1 < \theta$, on a :

$$\frac{OA}{OB} < \frac{KM}{KL} = \frac{\alpha}{\beta}$$

Nous dirions aujourd'hui :

$$\frac{OB}{OA} = \cos(\theta_1) > \cos(\theta) = \frac{KL}{KM}$$

Or $OA = OB'$(rayon du cercle), et :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB}$$

Donc :

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OA}{OB} < \frac{\alpha}{\beta}$$

ce qui prouve le lemme 4, puisque les polygones sont réguliers : le quotient de deux côtés sera le quotient des longueurs.

Remarque : le lemme 4 s'applique aussi bien à un secteur de cercle, avec la même démonstration.

Lemme 5. – *Soient deux grandeurs α et β avec $\alpha > \beta > 0$ et soit un cercle $\mathcal{C}$. On peut trouver deux polygones P_i et P_e, respectivement inscrit et circonscrit au cercle, tels que :*

$$1 < \frac{A(P_e)}{A(P_i)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

où $A(P)$ désigne l'aire du polygone P. De plus, ces deux polygones seront réguliers et auront un nombre pair de côtés.

Démonstration du lemme 5

Posons $\gamma = \sqrt{\alpha\beta}$. On a :

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} > 1$$

D'après le lemme précédent, on peut trouver deux polygones P_i et P_e, respectivement inscrit et circonscrit au cercle, tels que :

$$1 < \frac{l(P_e)}{l(P_i)} < \frac{\alpha}{\gamma}$$

Mais :

$$\frac{A(P_e)}{A(P_i)} = \frac{l(P_e)^2}{l(P_i)^2} < \frac{\alpha^2}{\gamma^2} = \frac{\alpha}{\beta}$$

ce qui prouve le lemme.

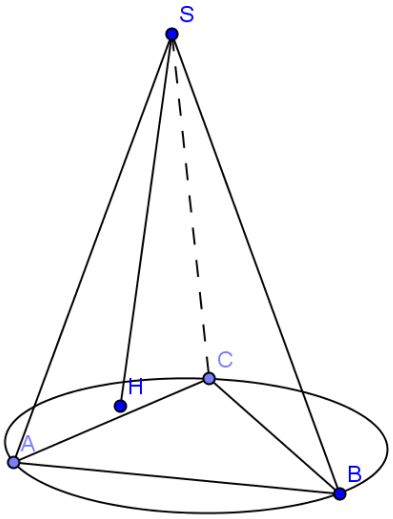
On a utilisé un résultat dû à Euclide : pour deux polygones semblables, le rapport des aires est égal au carré des rapports des longueurs.

Comme précédemment, ce lemme s'applique aussi bien à un secteur de cercle.

Lemme 6. – *Soit un cône de révolution de sommet S ; on inscrit dans sa base un triangle équilatéral ABC et on construit la pyramide P de sommet S et de base ABC. L'aire de la pyramide P (sans la base) est égale à l'aire d'un triangle ayant pour base le périmètre du triangle ABC et pour hauteur SH, où H est la projection de S sur l'un quelconque des côtés du triangle ABC. Ou encore :*

$$A(P) = \frac{1}{2} SH \times L(ABC)$$

où $L(ABC)$ est le périmètre du triangle ABC.



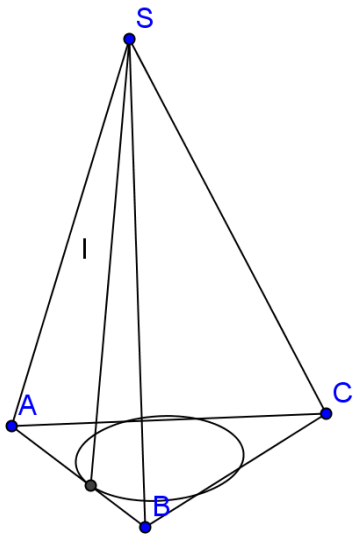
Démonstration du lemme 6

L'aire de la pyramide sans la base est la somme des aires des trois trianges SAB, SAC, SBC. Ces triangles sont égaux et isocèles ; ils ont pour hauteur SH et pour base respectives AB, BC, CA. L'aire du premier est donc $\frac{1}{2} SH \times AB$ et de même pour les deux autres ; ceci prouve le lemme.

Lemme 7. – *Soit un cône de révolution et une pyramide, dont la base est faite d'un triangle équilatéral ABC, circonscrite à ce cône. Alors l'aire de la pyramide est égale à l'aire d'un triangle dont la base a pour longueur le périmètre de ce triangle, et pour hauteur la génératrice du cône. Ou encore :*

$$aire(P) = \frac{l}{2} \times L(ABC)$$

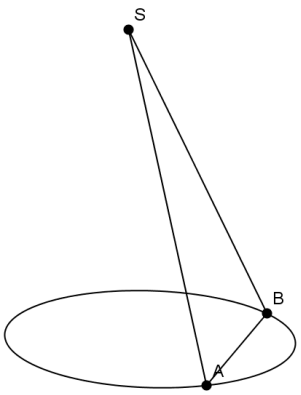
où l est la longueur de la génératrice du cône.



Démonstration du lemme 7

L'aire de la pyramide, comme précédemment, est la somme des aires des trois triangles SAB, SBC, SCA. Le triangle SAB a pour aire $aire(SAB) = \frac{l}{2} AB$ et de même pour les autres triangles ; ceci prouve le lemme.

Lemme 8. – *Soit un cercle* C *et AB une corde quelconque. Soit un cône de sommet S, s'appuyant sur le cercle* C. *Alors l'aire du triangle SAB est inférieure à l'aire de la portion de cône limitée par l'arc AB, de sommet S.*



Démonstration du lemme 8

Remarques :

- Sans formule de calcul explicite de l'aire d'un morceau de cône, ce lemme n'est pas évident.

- Il n'a pas été correctement compris des divers commentateurs.

Soit C le milieu de l'arc AB (on s'intéresse évidemment au plus petit des deux arcs). Soit S le sommet du cône. On va commencer par montrer que, pour les triangles SAB, SAC, SBC, on a :

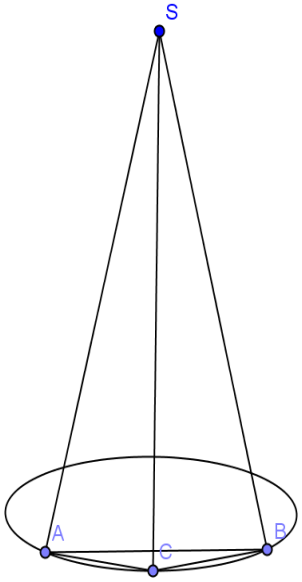
$$aire(SAB) < aire(SAC) + aire(SBC) \qquad (1)$$

Notons $l = SA = SB = SC$ la longueur de la génératrice du cône. Alors :

$$aire(SAB) = \frac{AB}{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2}$$

$$aire(SAC) = \frac{AC}{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{AC}{2}\right)^2}$$

$$aire(SBC) = \frac{BC}{2}\sqrt{l^2 - \left(\frac{BC}{2}\right)^2}$$



L'inégalité (1) est donc équivalente à :

$$AB\sqrt{l^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2} < 2AC\sqrt{l^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}$$

et comme $AB < 2AC$, il suffit que :

$$\sqrt{l^2-\left(\frac{AB}{2}\right)^2} < \sqrt{l^2-\left(\frac{AC}{2}\right)^2}$$

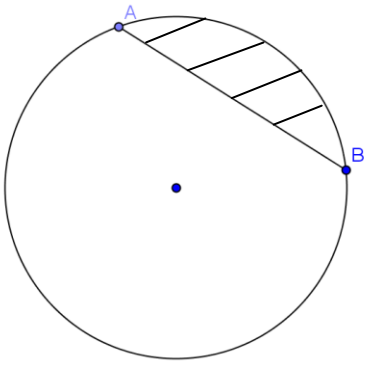
ce qui est réalisé puisque $AB > AC$. L'inégalité (1) est donc établie.

Posons :

$$\delta = aire(SAC) + aire(SCB) - aire(SAB)$$

On a $\delta > 0$ d'après (1).

Etant donnés deux points A et B sur un cercle, nous appellerons $pd(A,B)$ la portion de disque limitée par le segment AB et l'arc de cercle $\widehat{AB}$ (hachurée sur le dessin ci-contre).



On sait que :

$$aire\big(arc\ de\ cône(SAC)\big) + aire\big(pd(A,C)\big) > aire(triangle(SAC))$$

En effet, l'arc de cône plus la portion de disque constitue une surface convexe, ayant même limite que le triangle. D'après le postulat 3, le triangle (qui est plan) a la plus petite surface.

De la même façon,

$$aire\big(arc\ de\ cône(SCB)\big) + aire\big(pd(C,B)\big) > aire(triangle(SCB))$$

et en additionnant ces deux inégalités :

$$aire\big(arc\ de\ cône(SAB)\big) + aire\big(pd(A,C)\big) + aire\big(pd(C,B)\big) > aire\big(triangle(SAB)\big) + \delta \quad (2)$$

Nous avons deux cas possibles :

1) Si $aire\big(pd(A,C)\big) + aire\big(pd(C,B)\big) < \delta$, nous avons bien :

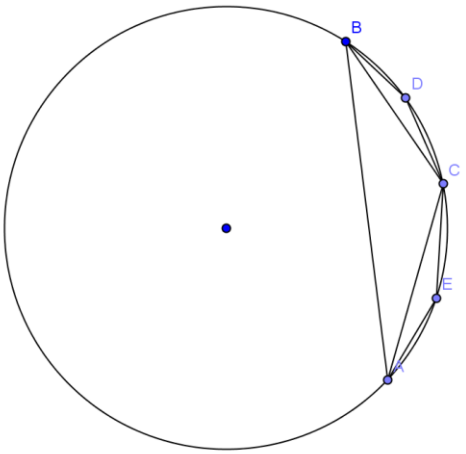
$$aire\big(arc\ de\ cône(SAB)\big) > aire\big(triangle(SAB)\big)$$

et notre démonstration est terminée.

2) Dans le cas contraire, introduisons les milieux des arcs AC et BC, notés D et E, et au besoin recommençons cette bissection, de telle sorte que la somme des portions de disque $pd(B,D)$, etc., ait une aire totale inférieure à δ.

Alors :

$$aire\big(cône(SBD)\big) + pd(B,D) > aire(triangle(SBD))$$



et de même pour les trois autres. On obtient en sommant les deux premiers :

$$\begin{aligned} aire\big(cône(SBC)\big) + pd(B,D) + pd(D,C) \\ > aire\big(triangle(SBD)\big) \\ + aire\big(triangle(SDC)\big) \end{aligned}$$

et donc d'après (1) :

$$\begin{aligned} aire\big(cône(SBC)\big) + pd(B,D) + pd(D,C) \\ > aire\big(triangle(SBC)\big) \end{aligned}$$

On obtient de même :

$$aire\big(cône(SAC)\big) + pd(A,E) + pd(E,C) > aire\big(triangle(SAC)\big)$$

et en sommant ces deux inégalités :

$$aire\big(cône(SAB)\big) + pd(A,E) + pd(E,C) + pd(B,D) + pd(D,C) > aire\big(triangle(SAB)\big) + \delta$$

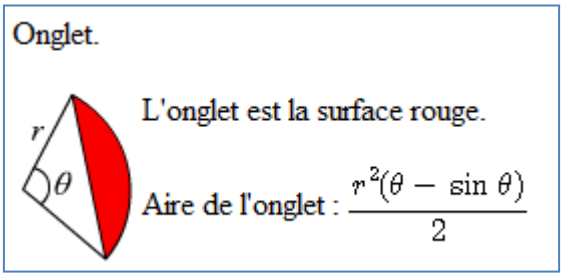
Mais on sait que :

$$pd(A,E) + pd(E,C) + pd(B,D) + pd(D,C) < \delta$$

et le lemme est établi.

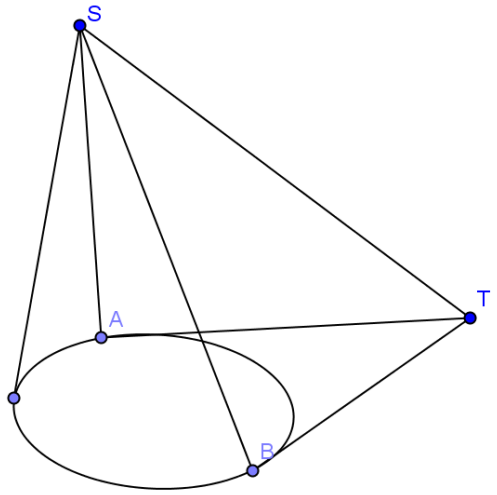
Ici, Archimède utilise le fait que l'aire de la portion de disque est un infiniment petit d'ordre 2, devant l'aire du triangle :

si $B \to A$, $aire\big(pd(A,B)\big) = o\big(aire\big(triangle(SAB)\big)\big)$.



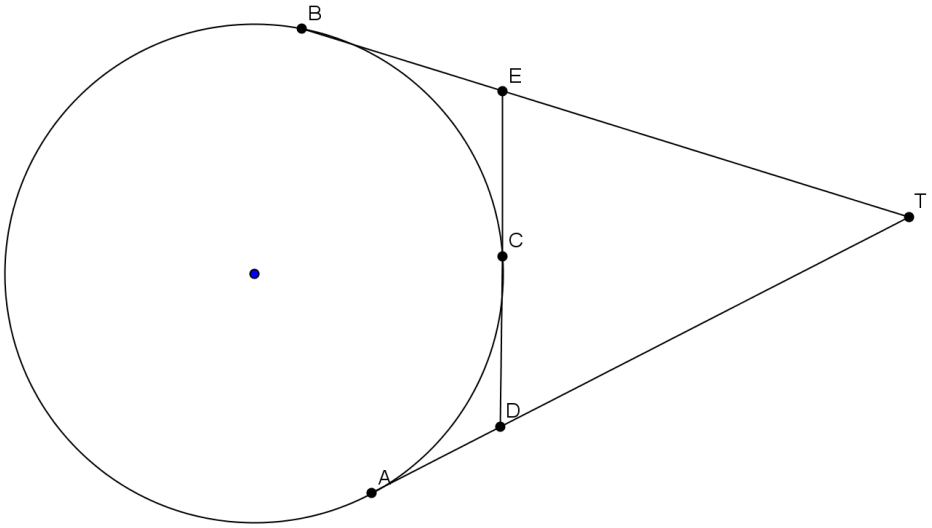
Lemme 9. – *Soit comme précédemment un cône de base circulaire* C*, de sommet S, et soient AT et BT deux tangentes au cercle, concourantes en T.*
Alors :

$$aire\big(triangle(SAT)\big) + aire\big(triangle(SBT)\big) > aire(portion\ de\ cone(\widehat{SAB}))$$



Démonstration du lemme 9

Introduisons le milieu de l'arc AB, noté C, et traçons la tangente au cercle en C ; elle coupe les segments AT et BT en D et E respectivement.



On va montrer que :

$$aire\big(tr(SAT)\big) + aire\big(tr(SBT)\big) > aire(tr(SBE) + aire(tr(SED) + aire(tr(SDA)$$

Tous ces triangles ont la même hauteur, à savoir la génératrice du cône. Il suffit donc de montrer que :

$$BT + TA > BE + ED + DA$$

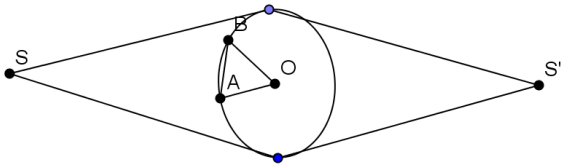
Mais ceci résulte du fait que $ED < ET + TD$.

Le reste de la démonstration procède comme au lemme précédent.

Note de BB

Pour ces deux lemmes, Archimède complique inutilement les choses.

Pour le lemme 8, on peut déduire directement le résultat du postulat 3, en complétant le cône par une symétrie par rapport à sa base, comme suit :



Supposons tout d'abord que l'angle AOB soit du type π/k ; soit A' le symétrique de A par rapport à O. En faisant tourner k fois la figure, on obtient deux ensembles convexes, limités par le même plan (à savoir SAA'S') : d'une part le demi-cône SAA' et son symétrique S'AA', et d'autre part une collection de triangles, SAB et son symétrique S'AB, et les triangles obtenus par rotation de ceux-ci. Comme l'un des ensembles est contenu dans l'autre, le postulat 3 s'applique et on en déduit que l'ensemble conique a une aire plus grande que l'ensemble fait de triangles ; en divisant par 2, puis par k, on en déduit le lemme 7 lorsque l'angle AOB est du type π/k. Si ce n'est pas le cas, on fait tourner $k-1$ fois et il y a un reste, que l'on peut traiter comme fait Archimède. Le même principe (compléter par symétrie) s'applique au lemme 8.

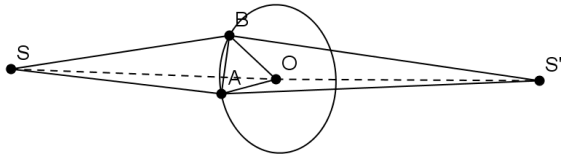
Mais ces démonstrations peuvent être considérablement simplifiées si on change le postulat initial, qui n'est pas sous sa forme la plus utilisable. Au lieu de considérer des ensembles convexes limités par des droites, il suffit de dire :

Postulat 2' : *Soient, dans un plan, deux ensembles convexes* C_1 *et* C_2*, avec* $\mathsf{C}_1 \sqsubset \mathsf{C}_2$*. Alors la longueur de la frontière de* C_1 *est inférieure à celle de* C_2*.*

Ce postulat est à l'évidence plus fort que le no 2. Mais inversement il lui est équivalent. En effet, étant donnés deux convexes comme ci-dessus, on peut grossir C_1, au moyen d'une homothétie de centre intérieur à ce convexe, sans modifier C_2, jusqu'à ce que C_1 et C_2 se touchent en un point A (si on grossit le premier, on augmente son périmètre, à l'évidence). Ceci fait, choisissons ce point A comme centre d'une nouvelle homothétie, et grossissons à nouveau C_1, sans modifier C_2, jusqu'à ce qu'un nouveau point de contact B apparaisse. Maintenant, nous avons deux points de contact entre les deux convexes ; nous pouvons considérer le segment AB et appliquer le postulat 2 d'Archimède aux deux demi-convexes, de part et d'autre du segment.

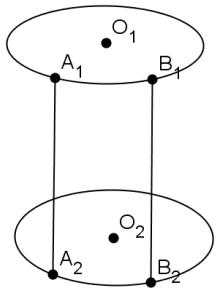
Dans l'espace, on aura :

Postulat 4' : *Soient, dans l'espace, deux ensembles convexes* C_1 *et* C_2*, avec* $\mathsf{C}_1 \sqsubset \mathsf{C}_2$*. Alors l'aire de la frontière de* C_1 *est inférieure à celle de* C_2*.*



Ceci permet de simplifier considérablement les démonstrations précédentes ; par exemple, pour le lemme 8, on applique directement le postulat 4' aux deux ensembles convexes SOABS' : un prisme et son symétrique, un cône et son symétrique.

Lemme 10. – *Soit un cylindre à base circulaire, coupé par deux plans parallèles, perpendiculaires à l'axe du cylindre. Soient* C_1 *et* C_2 *les cercles supérieur et inférieur, et soient* A_1A_2, B_1B_2, *deux segments sur le cylindre, parallèles à l'axe du cylindre. Alors l'aire de la portion de cylindre limitée par ces quatre points est supérieure à l'aire du rectangle qu'ils déterminent.*

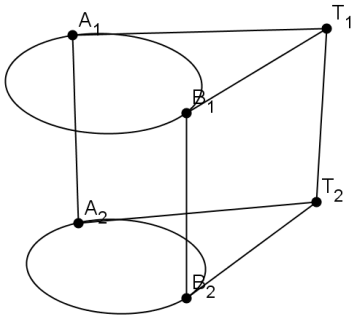


Démonstration du lemme

La démonstration d'Archimède procède comme pour les deux lemmes précédents, en introduisant les milieux des arcs A_1B_1 et A_2B_2. Mais il y a plus simple : pour le rectangle comme pour la portion de cylindre, la surface est le produit de la hauteur par la longueur de la base, et la longueur de la base est plus faible pour le rectangle (le segment A_2B_2 est plus court que l'arc).

Lemme 11. – *Etant donné un cylindre comme ci-dessus, et deux plans parallèles à l'axe du cylindre, tangents au cylindre selon les segments* A_1A_2 *et* B_1B_2 *respectivement. Soit* T_1T_2 *le segment intersection de ces deux plans. Alors :*

$$aire(rectangle\, A_1A_2T_1T_2) + aire(rectangle\, B_1B_2T_1T_2) > aire(cylindre A_1A_2B_1B_2)$$



Démonstration du lemme 11

Les deux ensembles ont la même hauteur (la hauteur du cylindre) et l'arc de cercle A_1B_2 est plus court que la somme des segments A_2T_2 et B_2T_2.

Lemme 12. – *Soit un cylindre droit, de hauteur* h *et de rayon* r. *Ce cylindre (sans les disques extrémités) a la même surface qu'un cercle* C_ρ *de rayon* $\rho = \sqrt{2rh}$.

Démonstration du lemme 12

Circonscrivons au cercle C_r un polygone régulier P_r ; soit P_ρ le polygone régulier semblable, circonscrit au le cercle C_ρ . Si le polygone P_r a pour périmètre l, le polygone P_ρ aura pour périmètre $l\rho/r$. L'aire de P_r est :

$$aire(P_r) = \frac{lr}{2}$$

et de même :

$$aire(P_\rho) = \frac{l\rho^2}{2r} = lh$$

L'aire du prisme circonscrit au cylindre CYL, construit sur P_r, est également :

$$a = lh$$

On a donc, d'après le choix de ρ, égalité entre l'aire de P_ρ et l'aire du prisme circonscrit au cylindre :

$$aire(P_\rho) = aire(PRISME) \qquad (1)$$

En langage moderne, cette égalité nous suffit, car en "faisant tendre" le polygone circonscrit vers le cercle, le prisme tend vers le cylindre et le lemme en résulte. Archimède procède évidemment par continuité, mais il ne la formalise pas comme nous. Voyons d'abord sa présentation. Elle consiste à prouver l'égalité en démontrant que les deux inégalités sont impossibles.

Soit $\alpha = aire(CYL)$ et $\beta = aire(\mathrm{C}_\rho)$. Supposons d'abord $\beta > \alpha$.

On peut, d'après le lemme 4, trouver deux polygones semblables, l'un circonscrit l'autre inscrit au cercle C_r, tels que :

$$1 < \frac{l(P_e)}{l(P_i)} < \frac{\beta}{\alpha}$$

et, comme $l(C_r) > l(P_i)$,

$$1 < \frac{l(P_e)}{l(C_r)} < \frac{l(P_e)}{L(P_i)} < \frac{\beta}{\alpha}$$

En multipliant par la hauteur h du cylindre, on en déduit :

$$1 < \frac{aire(prisme)}{aire(CYL)} < \frac{\beta}{\alpha}$$

Mais d'après ce qui précède, l'aire du prisme est égale à celle du polygone P_ρ, et donc :

$$1 < \frac{aire(P_\rho)}{aire(CYL)} < \frac{\beta}{\alpha}$$

Mais l'aire du cercle C_ρ est inférieure à celle du polygone circonscrit ; on a donc a fortiori :

$$\frac{aire(C_\rho)}{aire(CYL)} < \frac{\beta}{\alpha}$$

ou encore $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$, ce qui est absurde.

Supposons maintenant $\beta < \alpha$, ou $\frac{\alpha}{\beta} > 1$. D'après le lemme 5, on peut trouver deux polygones P_i et P_e, respectivement inscrit et circonscrit au cercle C_ρ, tels que :

$$1 < \frac{aire(P_e)}{aire(P_i)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

Comme $aire(C_\rho) > aire(P_i)$, il en résulte :

$$\frac{aire(P_e)}{aire(C_\rho)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

et d'après le choix de ρ défini plus haut :

$$\frac{aire(prisme)}{aire(C_\rho)} < \frac{\alpha}{\beta} \tag{2}$$

Par ailleurs, on sait que :

$$aire(C_\rho) < aire(P_e)$$

et en multipliant par la hauteur :

$$aire(CYL) < aire(prisme)$$

En reportant dans (2), on en déduit :

$$\frac{aire(CYL)}{aire(C_\rho)} < \frac{\alpha}{\beta}$$

ce qui implique $\frac{\alpha}{\beta} < \frac{\alpha}{\beta}$; impossible.

Note de BB : la continuité selon Archimède

Dans la démonstration ci-dessus, nous avons deux suites d'objets :

A_n, les prismes construits sur les polygones associés au cercle C_r ; ces prismes convergent vers le cylindre CYL.

B_n, les polygones construits sur le cercle C_ρ .

On sait (en langage moderne) que $aire(A_n) \to aire(CYL)$ et que $aire(B_n) \to aire(\mathrm{C}_\rho)$.

Comme Archimède montre (cf. ci-dessus) que, pour tout n, $aire(A_n) = aire(B_n)$, il en résulte (en langage moderne) que $aire(CYL) = aire(\mathrm{C}_\rho)$. Mais Archimède n'utilise pas le passage à la limite ; il montre que les deux situations $aire(CYL) < aire(\mathrm{C}_\rho)$ et $aire(CYL) > aire(\mathrm{C}_\rho)$ sont également impossibles. Voici le lien entre les deux approches.

Posons $\alpha = aire(CYL)$ et $\beta = aire(\mathrm{C}_\rho)$, $a_n = aire(A_n)$, $b_n = aire(B_n)$. Supposons $\alpha > \beta$, ou

$$1 < \frac{\alpha}{\beta} \tag{1}$$

Posons $\delta = \alpha/\beta - 1$. Soit $\varepsilon > 0$; choisissons n assez grand pour que :

$$\alpha(1-\varepsilon) < a_n < \alpha$$

et

$$\beta(1-\varepsilon) < b_n < \beta$$

Alors :

$$\frac{\alpha(1-\varepsilon)}{\beta} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{\alpha}{\beta(1-\varepsilon)} \tag{2}$$

et comme $a_n = b_n$, on obtient :

$$\frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{1-\varepsilon}$$

une contradiction si $\varepsilon > 0$ a été choisi suffisamment petit pour que :

$$\frac{1}{1-\varepsilon} < 1 + \delta.$$

On procède de la même manière pour démontrer que $\alpha < \beta$ est impossible.

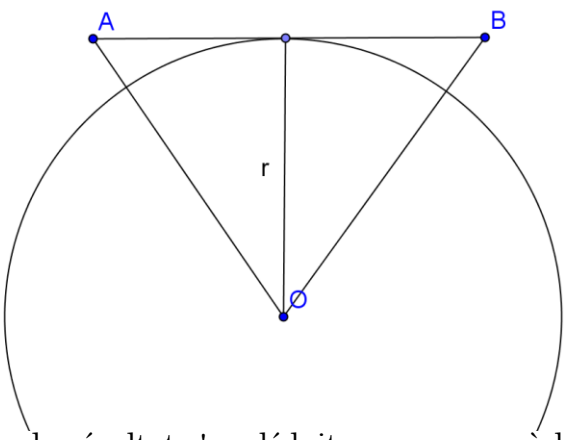
La continuité des fonctions "longueur" et "aire" est établie par Archimède aux lemmes 4 et 5 ci-dessus ; c'est uniquement le passage à la limite qui est présenté de manière différente. Par la suite, nous adopterons la présentation moderne, qui est plus simple.

Lemme 13. – *Soit* $\mathcal{C}$ *un cône de révolution, de génératrice de longueur* l*, appuyé sur un cercle de rayon* r*. Ce cône a même aire qu'un cercle* $\mathcal{C}_\rho$*, avec :*

$$\rho = \sqrt{lr}$$

Démonstration du lemme 13

Il suffit de montrer cette propriété pour un polygone circonscrit au cercle, en remplaçant le cône par la pyramide associée. Soit P_r un polygone circonscrit au cercle de rayon r et soit L le périmètre de ce polygone. Alors l'aire du cône appuyé sur le polygone est $Ll/2$, d'après le lemme 7.



Soit P_ρ un polygone semblable au premier, circonscrit au cercle de rayon ρ. Son périmètre sera donc $\frac{L\rho}{r}$ et son aire $\frac{L\rho^2}{2r} = \frac{Ll}{2}$, compte-tenu du choix de ρ. On constate que le cône appuyé sur le polygone P_r et le polygone P_ρ ont même aire ; le résultat s'en déduit par passage à la limite, comme expliqué ci-dessus.

Lemme 14. – *Soit* $\mathcal{C}$ *un cône de révolution, de génératrice de longueur* l*, appuyé sur un cercle* $\mathcal{C}_r$ *de rayon* r*. Alors :*

$$\frac{aire(\text{cône})}{aire(\mathcal{C}_r)} = \frac{l}{r}$$

Démonstration du lemme 14

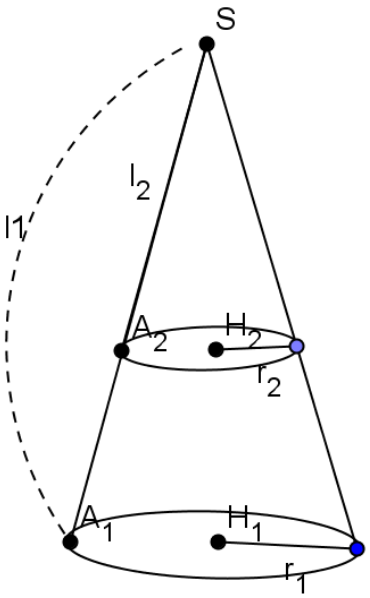
On sait d'après le lemme 13 que le cône a même aire que le cercle C_ρ, avec $\rho = \sqrt{lr}$. Or :

$$\frac{aire(\mathrm{C}_\rho)}{aire(\mathrm{C}_r)} = \frac{\rho^2}{r^2} = \frac{l}{r}$$

On sait en effet que l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré du rayon. Ceci prouve le lemme.

Lemme 15. – *Soit un cône de révolution, coupé par deux plans perpendiculaires à l'axe ; soient r_1 et r_2 les rayons respectifs des cercles correspondants ; soient l_1 et l_2 les longueurs des portions de génératrice. L'aire du tronc de cône situé entre les deux plans est égale à l'aire d'un cercle de rayon :*

$$\rho = \sqrt{(l_1 - l_2)(r_1 + r_2)}$$



Démonstration du lemme 15

Nous allons montrer que :

$SA_1 \times A_1H_1 = SA_2 \times A_2H_2 + A_1A_2(A_1H_1 + A_2H_2)$ (1)

ou encore :

$l_1r_1 = l_2r_2 + (l_1 - l_2)(r_1 + r_2)$ (2)

Ceci équivaut à :

$$SA_1 \times A_1H_1 = SA_2 \times A_2H_2 + A_1A_2 \times A_1H_1 + A_1A_2 \times A_2H_2$$

ou encore, puisque $SA_1 = SA_2 + A_1A_2$,

$$SA_2 \times A_1H_1 = SA_2 \times A_2H_2 + A_1A_2 \times A_2H_2$$

Ce qui s'écrit encore :

$$SA_2 \times A_1H_1 = SA_1 \times A_2H_2$$

qui est équivalent à :

$$\frac{SA_2}{SA_1} = \frac{A_2H_2}{A_1H_1}$$

propriété qui est bien vérifiée ; ceci établit (1).

D'après le lemme 13, le cône de génératrice l_1 a la même aire que le cercle C_1 de rayon $\rho_1 = \sqrt{r_1l_1}$ et de même pour le cône de génératrice l_2.

Or l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré du rayon ; notons λ le coefficient de proportionnalité. Le terme $\lambda l_1 r_1$ est donc l'aire du cône de génératrice l_1 et le terme $\lambda l_2 r_2$ est l'aire du cône de génératrice l_2. Par conséquent, le terme $\lambda(l_1 - l_2)(r_1 + r_2)$, d'après (2), est l'aire du tronc de cône. Cette aire est celle d'un cercle de rayon

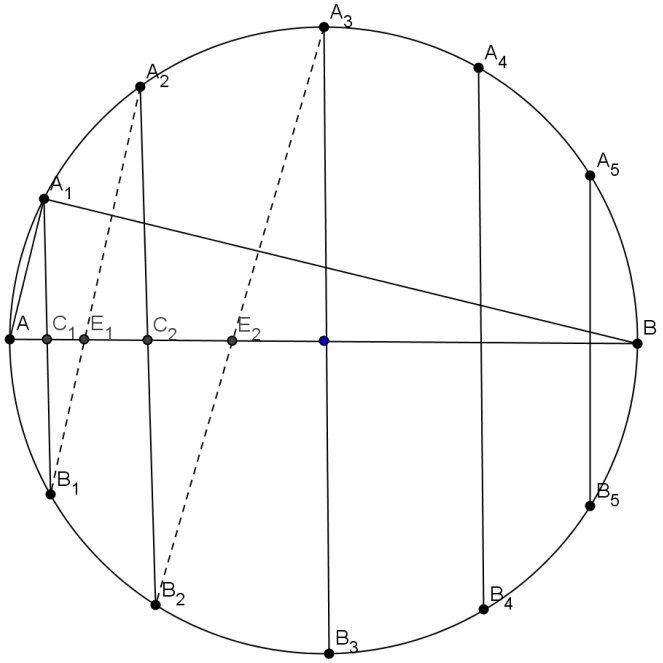
$$\rho = \sqrt{(l_1 - l_2)(r_1 + r_2)}$$

ce qui prouve le lemme.

Lemme 16. – *Inscrivons dans un cercle un polygone régulier ayant un nombre pair de côtés, et traçons les cordes A_1B_1, A_2B_2, etc. Alors :*

$$\frac{A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_nB_n}{AB} = \frac{BA_1}{AA_1}$$

Démonstration du lemme 16



Les cordes A_1B_1, A_2B_2, etc. sont parallèles entre elles, mais aussi les cordes AA_1, B_1A_2, B_2A_3, etc. Les triangles AA_1C_1 et $E_1B_1C_1$ sont donc semblables. Il en résulte que :

$$\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{B_1C_1}{C_1E_1}$$

Mais les triangles $E_1B_1C_1$ et $E_1A_2C_2$ sont aussi semblables ; il en résulte que :

$$\frac{B_1C_1}{C_1E_1} = \frac{A_2C_2}{C_2E_1}$$

Nous obtenons donc, en réitérant ce raisonnement :

$$\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{C_1B_1}{C_1E_1} = \frac{A_2C_2}{C_2E_1} = \cdots = \frac{A_1C_1 + C_1B_1 + A_2C_2 + C_2B_2 + \cdots}{AC_1 + C_1E_1 + C_2E_1 + \cdots} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_nB_n}{AB}$$

Mais les triangles AA_1C_1 et AA_1B sont aussi semblables (triangles rectangles ayant un angle commun) ; il en résulte que :

$$\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{BA_1}{AA_1}$$

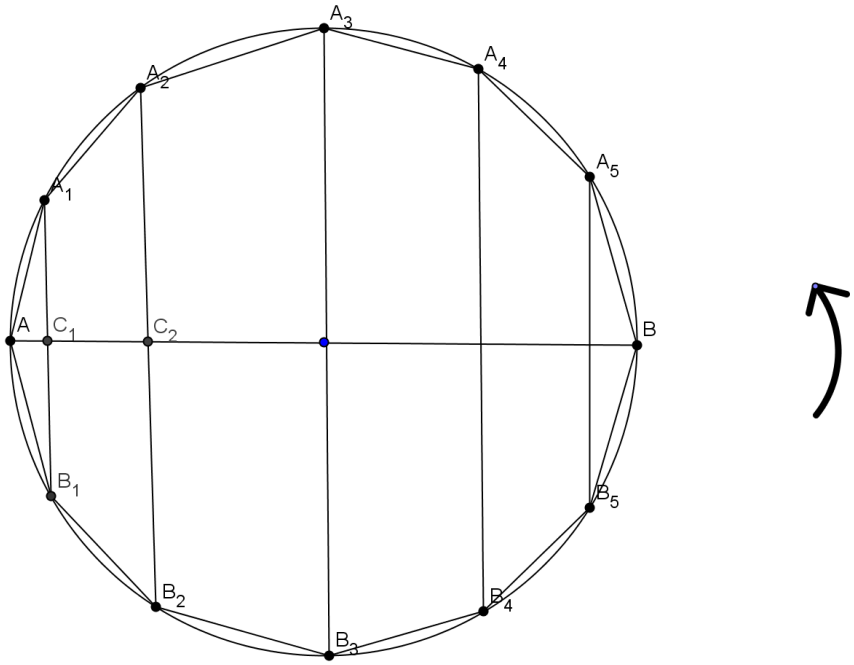
Ceci prouve le lemme.

[Note de BB : le lemme 16 tient du prodige, et sa démonstration aussi. Pourquoi Archimède calcule-t-il la somme des longueurs $A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots$? Si ces segments étaient régulièrement espacés d'une distance d, cette somme serait approximativement l'aire du disque divisée par d. Mais les segments ne sont pas régulièrement espacés, puisque deux extrémités consécutives sont reliées par un segment de longueur constante. Faisons tourner chaque

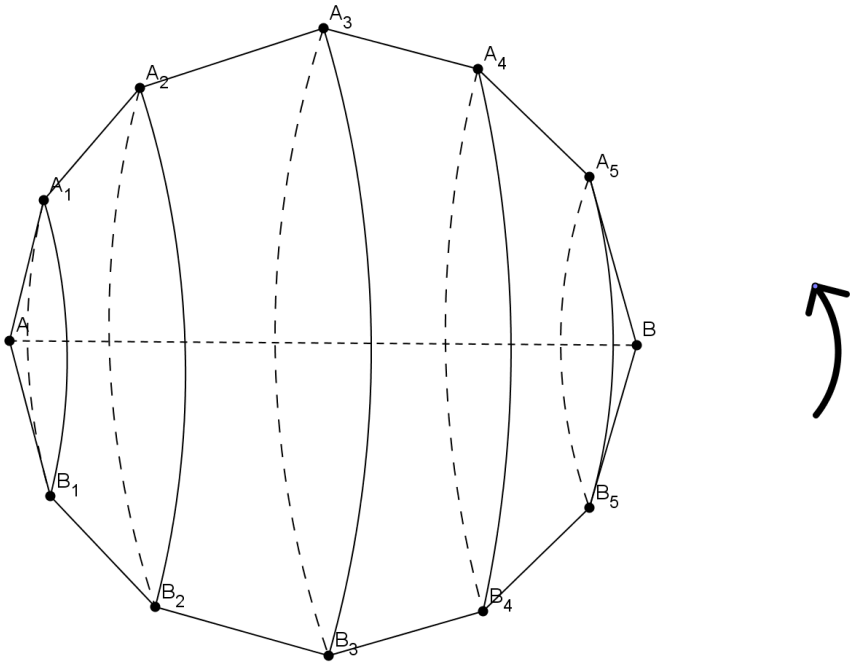
segment autour de l'axe AB (lemme suivant) ; la longueur A_1B_1 est (à π près) la longueur du cercle généré par la rotation de ces points. Si on la multiplie par la longueur constante $\delta = A_1A_2$, on obtient l'aire d'un tronc de cône de révolution. La somme $A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots$, calculée par Archimède, est donc une approximation (à π près) de l'aire de la sphère divisée par δ ...]

Lemme 17. - *Inscrivons dans un cercle un polygone régulier ayant un nombre pair de côtés, et faisons tourner la figure autour de l'axe AB. Alors le cercle engendre une sphère ; chaque sommet du polygone décrit un cercle sur cette sphère et ces cercles sont parallèles entre eux. Les côtés du polygone se déplacent selon des cônes, et la figure inscrite dans la sphère, générée par ces côtés, est d'aire inférieure à celle de la sphère.*

La démonstration de ce lemme est claire.



Notons PRI le "polygone de révolution" inscrit dans la sphère, défini au lemme précédent, à partir de la révolution d'un polygone inscrit dans le cercle. C'est une réunion de troncs de cône.



Lemme 18. – *L'aire du polygone PRI inscrit dans la sphère est égale à l'aire d'un cercle de rayon :*

$$\rho = \sqrt{AA_1 \times \sum_i A_iB_i}$$

Démonstration du lemme 18

La figure est la même que précédemment. Le polygone PRI inscrit dans la sphère est une réunion de troncs de cônes et son aire est la somme des aires de troncs de cônes engendrés par les segments AA_1, AB_1 (cône 1), A_1A_2, B_1B_2 (cône 2), A_2A_3, B_2B_3 (cône 3), etc.

D'après le lemme 13, l'aire du cône 1 est égale à celle d'un cercle de rayon r_1, avec :

$$r_1^2 = AA_1 \times \frac{A_1B_1}{2}$$

D'après le lemme 15, l'aire du tronc de cône A_1A_2, B_1B_2 est égale à celle d'un cercle de rayon r_2, avec :

$$r_2^2 = AA_1 \times \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{2}$$

Celle du tronc de cône A_2A_3, B_2B_3 est égale à celle d'un cercle de rayon r_3, avec :

$$r_3^2 = AA_1 \times \frac{A_2B_2 + A_3B_3}{2}$$

etc.

Sommant toutes ces égalités, on en déduit que l'aire de PRI est égale à la somme des aires des cercles, c'est-à-dire à l'aire d'un cercle de rayon ρ, avec :

$$\rho^2 = AA_1 \times \frac{A_1B_1}{2} + AA_1 \times \frac{A_1B_1 + A_2B_2}{2} + AA_1 \times \frac{A_2B_2 + A_3B_3}{2} + \cdots$$

ou encore :

$$\rho^2 = AA_1 \times (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \cdots)$$

ce qui prouve le lemme.

Proposition 19. – *Les notations sont les mêmes que ci-dessus. L'aire du polygone PRI inscrit dans la sphère est égale à celle d'un cercle de rayon ρ avec :*

$$\rho^2 = AB \times A_1B$$

où AB est un diamètre et A_1 est le point du polygone voisin de A.

Démonstration de la Proposition 19

Le lemme 18 nous dit que l'aire de PRI est celle d'un cercle de rayon ρ avec

$$\rho^2 = AA_1 \times \sum_i A_iB_i$$

Mais nous avons vu (lemme 16) que :

$$\frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + \cdots}{AB} = \frac{A_1B}{AA_1}$$

et en reportant, nous obtenons la proposition.

Théorème 1. – *L'aire de la sphère est égale à 4 fois l'aire du grand cercle.*

Démonstration du Théorème

Comme d'habitude, Archimède procède en deux temps ; il commence par montrer que l'aire de la sphère ne peut être supérieure à 4 fois l'aire du grand cercle, puis qu'elle ne peut être inférieure.

La première assertion résulte immédiatement de la proposition : puisque $A_1B < AB$, on obtient $aire(PRI) < aire(cercle\ rayon\ D)$, où D est le diamètre du grand cercle ($D = AB = 2R$), et donc $aire(PRI) < 4\ aire(cercle\ rayon\ R)$, Comme le polygone régulier inscrit peut être pris aussi proche que l'on veut de la sphère, il en résulte :

$$aire(sphère) \leq 4\ aire(cercle\ rayon\ R).$$

Archimède démontre l'inégalité inverse en considérant des polygones circonscrits.

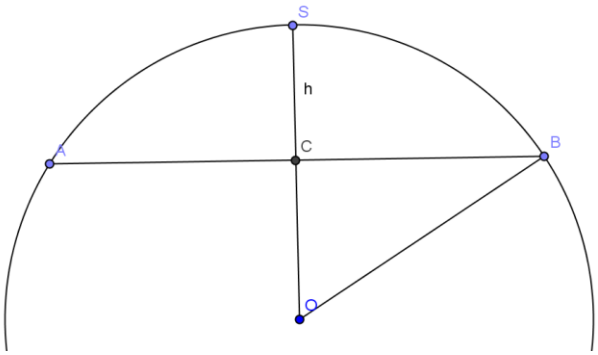
Mais nous pouvons faire le raisonnement en une seule étape : la proposition 19 est une égalité ; lorsque le nombre n de côtés tend vers l'infini, $aire(PRI) \to aire(sphère)$ et $A_1B \to AB$. Ceci prouve le théorème.

Théorème 2. – *Soit une calotte sphérique de sommet S et soit A un point quelconque de la périphérie de la calotte. Alors l'aire de la calotte est égale à l'aire du cercle de rayon SA.*

Le théorème 1 est un cas particulier de celui-ci (cas où la calotte est la sphère tout entière).

La démonstration du théorème 2 utilise les mêmes méthodes : découpage d'un arc de cercle (et non plus du cercle entier) au moyen d'un polygone avec un nombre pair de côtés.

Il est intéressant de remarquer que la formule habituellement donnée pour calculer l'aire d'une calotte sphérique dépend de deux paramètres : $A = 2\pi Rh$, où R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte, tandis que la formule d'Archimède n'utilise qu'un seul paramètre : la distance entre le centre de la calotte et son bord.



Voyons le lien entre les deux. On a $SC = h$, $OC = R - h$, $OA = R$, et donc :

$$AC^2 = R^2 - (R - h)^2 = 2Rh - h^2$$

Il en résulte que :

$$SA^2 = AC^2 + CS^2 = 2RH$$

Les deux formules sont donc bien équivalentes.

Nous voyons ainsi, au passage, comment calculer la moyenne géométrique de deux grandeurs :

$$SA = \sqrt{2\,SO \times SC}.$$

III. Commentaires

Si quelqu'un, en 2010, m'apportait cette démonstration, je la lirais avec admiration, en me disant "voici enfin quelqu'un qui a des idées originales !". Partir d'un postulat de convexité est original, vouloir relier directement une sphère à son grand cercle (sans passer par des formules de calcul des aires) est original. Je constaterais aussi que l'auteur utilise fort adroitement le calcul différentiel et le calcul intégral et je conclurais qu'il est de tout premier niveau (au sens 2010) et a eu la chance de n'être pas formaté par notre système d'enseignement. Je serais également admiratif de la rigueur de la rédaction, sans commune mesure avec les articles que l'on voit généralement de nos jours.

Si maintenant on me dit "cette démonstration a plus de 2200 ans", je suis d'abord perplexe, puis irrité. Triplement perplexe, triplement irrité.

Perplexe 1

S'agit-il d'un faux ? Cette démonstration aurait pu être écrite par quelqu'un de la stature de Gauss, qui aurait voulu s'amuser. Mais j'ai sous les yeux le livre, traduction du Codex A, et l'histoire de ce Codex (que je retrace plus haut) est bien connue. N'importe qui, je suppose, peut comparer ce texte à celui de la première édition, datant de 1544. Comme il ne s'est pas passé grand'chose (mathématiquement parlant) entre -212 av JC et 1544, autant admettre que le texte est bien d'Archimède.

Perplexe 2

L'approche d'Archimède contredit complètement tout ce que nous connaissons de l'histoire des sciences, où tous les progrès sont extrêmement lents. On peut lire le livre très intéressant d'Arthur Koestler "Les somnambules", où il décrit l'histoire de la cosmologie, depuis les Grecs. Il a fallu des milliers d'années et de tâtonnements pour élaborer l'astronomie moderne. Il en va de même en mathématiques, où les progrès sont infiniment lents : quelqu'un pose une question, puis quelqu'un d'autre en résout une petite partie, puis un troisième repose la question sous une autre forme, un quatrième, vingt ans plus tard, en résout une autre petite partie, etc. Il a fallu plus de trois cents ans aux mathématiciens pour résoudre une question posée par Fermat.

La notion de convexité, dont Archimède fait son point de départ est évidemment enseignée aujourd'hui, mais en licence ou maîtrise !

Ensuite, il introduit des notions extrêmement difficiles, comme le calcul différentiel et le calcul intégral, qu'il manipule avec virtuosité. Il distingue les infiniment petits d'ordre 1 et d'ordre 2. Et il rédige tout ceci avec la plus grande rigueur.

Perplexe 3

La science grecque de ce temps pourrait avoir été beaucoup plus avancée que nous ne le pensons aujourd'hui, et toutes ces idées que manipule Archimède pourraient avoir été familières à ses contemporains. Ceci répondrait au point précédent.

Il est tout à fait certain que la science grecque était plus avancée que l'idée que nous nous en faisons. Eratosthène, nous l'avons raconté dans la Lettre de la SCM, avait conçu une méthode de mesure du rayon terrestre, qui s'est révélée exacte à 10 % près ; cette méthode reposait sur l'observation suivante : un puits, à 50 km plus au sud, était éclairé par les rayons du soleil le 21 juin à midi. Qu'on puisse, de cette simple observation, déduire le rayon terrestre constitue une performance intellectuelle dont nous sommes aujourd'hui incapables. Nous, quand nous

voyons un puits, nous pensons aux moyens d'y enfermer du CO2 : à chaque civilisation ses réussites.

Mais Archimède prend soin, partout dans ses textes, de mentionner l'état des connaissances antérieures. Il distingue précisément ce qui était connu et son apport personnel, faisant preuve en cela d'une honnêteté intellectuelle qui ne s'est guère perpétuée. Et il présente comme venant de lui le théorème et tous les lemmes.

A ce stade, et quelle que soit notre perplexité, nous sommes obligés de convenir que ce texte est bien d'Archimède, et que, comme l'écrit E.T. Bell "Men of Mathematics", il contient à l'évidence la création du calcul différentiel et du calcul intégral, 1900 ans avant Newton ou Leibniz. Il procède aussi de méthodes de pensée complètement différentes des nôtres. Mais alors la perplexité fait place à l'irritation.

Irritation 1

Pourquoi Newton et Leibniz ne mentionnent-ils pas Archimède ?

On rapporte qu'ils l'ont lu. Je n'ai pas trouvé de trace de cette mention dans les "Principia" de Newton, ni chez Leibniz, mais je ne suis pas un spécialiste de l'histoire des sciences et j'ai pu laisser passer une référence.

La raison la plus plausible de cette omission est qu'ils considéraient que c'était trop ancien, et que citer quelque chose d'aussi ancien faisait "ringard" : cette attitude vaut encore aujourd'hui. Mais Gauss fait figurer Archimède parmi les trois mathématiciens les plus importants dans l'histoire de l'humanité.

Personnellement, je n'ai jamais vu Archimède cité dans aucun des livres de mathématiques (niveau recherche) que j'ai lus au cours de ma carrière. Le Bourbaki "Espaces Vectoriels Topologiques" attribue l'invention d'un procédé de discrétisation à Bernoulli.

[Commentaire de M. Michel Demazure, 19/05/2010 : Au sujet de Newton vs Archimède, c'est une question que je m'étais posée. Je me demande si une raison n'est pas que les fluxions à la Newton, ça veut dire qu'on étudie une fonction en regardant sa dérivée et donc on parle de primitives, tandis que avec (ce qu'on appellera) les indivisibles à la Archimède, on calcule des intégrales définies. Et que les limites cachées dans Archimède sont plus délicates que celles de Newton.

Par exemple, Galilée passera à la Newton de $v = gt$ à $x = ½ gt^2$. Voir aussi la démonstration de la loi des aires chez Newton…]

Irritation 2

Pourquoi ceci n'a-t-il pas été traduit correctement ?

Les textes d'Archimède ont été traduits à de nombreuses reprises, et la traduction que j'ai utilisée (Charles Mugler) est infiniment meilleure que celle disponible sur Internet
http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/oeuvres1.htm

Mais elle n'a pas été faite avec la collaboration d'un mathématicien professionnel. Par exemple, tout au début, le traducteur écrit "concave" là où j'ai mis "convexe" (mais la définition de "convexe" est correcte, et c'est la même qu'aujourd'hui).

Or Archimède est difficile à lire ; tout d'abord, bien sûr, parce que c'est du grec ancien (ou plus exactement du dialecte dorique), mais surtout parce que Archimède écrivait pour des mathématiciens professionnels. Il ne se soucie pas de vulgarisation.

Une difficulté supplémentaire tient au fait que Archimède travaillait toujours seul ; il écrivait de temps en temps une lettre à un ami. Comme la lettre en question fait 90 pages (dans le livre), il ne devait pas y en avoir souvent ; peut-être une fois par an. Et il ne semble pas avoir reçu beaucoup de réponses : dans aucun de ses textes n'apparaît un quelconque commentaire à une remarque qui lui aurait été faite. On peut retenir ceci : il écrivait, et personne ne répondait. Il en résulte ce qui est toujours vrai en pareil cas : de nombreuses démonstrations sont compliquées à l'excès. S'il avait eu quelqu'un à qui les raconter, il les aurait lui-même simplifiées, ceci est tout à fait évident pour un mathématicien professionnel.

Enfin, dernière difficulté : les notations mathématiques n'existaient pas à l'époque. Manifestement, il n'en avait pas besoin, et il pouvait raisonner de manière totalement abstraite. Mais la transmission des idées à des mathématiciens plus ordinaires requiert des notations appropriées.

Il y aurait donc un travail de traduction à faire : prendre les textes d'Archimède et les réécrire avec les notations mathématiques d'aujourd'hui, en les simplifiant lorsque c'est possible, et en tirant parti des notions qui ont été introduites entre temps (comme la continuité, par exemple). C'est plus que de la traduction : c'est la remise à jour de ses idées, en langage moderne.

A titre d'information, il m'a fallu environ un mois de travail (en équivalent temps complet, réparti sur une période plus longue) pour le théorème présenté ici. Assez naturellement, les choses vont en s'accélérant : au début, on se demande "mais qu'est-ce qu'il veut dire ?", et à la fin on est habitué à sa manière de penser.

Irritation 3

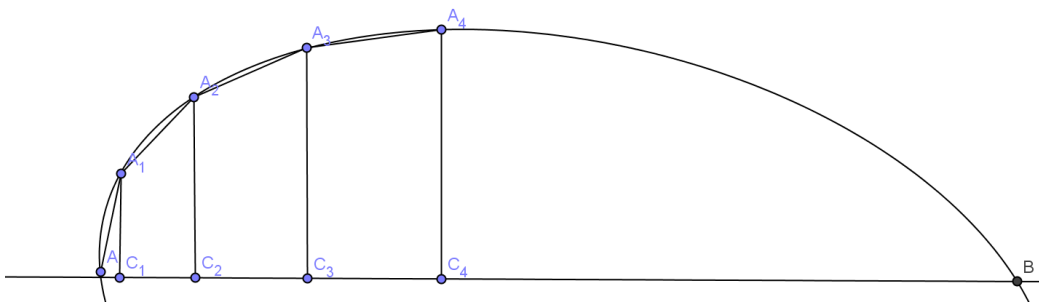
Pourquoi n'est-ce pas enseigné ?

Notre civilisation aime bien les formules qui permettent des calculs, pas seulement en mathématiques, mais en physique et en chimie ; elle n'aime pas les relations. Ceci était vrai bien avant l'apparition de l'informatique, mais celle-ci n'a fait qu'accentuer cette tendance.

Or un théorème comme celui que nous avons présenté établit une relation entre deux objets (une sphère et un cercle) ; il ne donne pas directement de formule de calcul. Un tel théorème est beaucoup plus facile à retenir que la formule de l'aire de la sphère (que la plupart d'entre nous confondent avec son volume !). Le théorème 2 (sur les calottes sphériques) est aussi tout à fait frappant, parce qu'il donne un résultat simple, dépendant d'un seul paramètre, tandis que la formule usuelle en requiert deux.

Cela dit, pour présenter les démonstrations à des étudiants, niveau Master, ou à des enseignants du secondaire, il faudrait détailler une méthodologie pas à pas. La démonstration actuelle est trop complexe. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder la multitude de sites web consacrés à Archimède et utilisant les traductions existantes : ils fourmillent d'erreurs, parce que les auteurs n'ont pas correctement compris. Encore une fois, le travail préliminaire doit être fait par des professionnels.

Voici un exemple, qui pourrait facilement être enseigné. Revenons au lemme 16, ci-dessus, et, au lieu d'un cercle, considérons une courbe quelconque $y = f(x)$, prenant la valeur 0 en $x = A$ et $x = B$.



Reportons, comme fait Archimède, un segment de longueur constante l et construisons ainsi les points $A_1, A_2, \ldots$ sur la courbe ; abaissons-les perpendiculairement sur l'axe AB ; nous obtenons ainsi les points $C_1, C_2, \ldots$, dont les abscisses seront notées $c_1, c_2, \ldots$, l'axe AB étant pris pour axe des abscisses.

Faisons tourner la courbe autour de l'axe AB ; le produit $A_nC_n \times A_nA_{n+1} = l\, A_nC_n$ représente, à 2π près, l'aire du tronc de cône généré par la rotation du segment A_nA_{n+1}. La somme $l\sum_n A_nA_{n+1}$ tend donc, lorsque $l \to 0$, vers l'aire de la surface de révolution engendrée par la courbe $y = f(x)$ dans sa rotation autour de l'axe AB.

Mais on a aussi :

$$l = \sqrt{\left(f(c_{n+1}) - f(c_n)\right)^2 + (c_{n+1} - c_n)^2}$$

et puisque :

$$f'(c_n) \simeq \frac{f(c_{n+1}) - f(c_n)}{c_{n+1} - c_n}$$

on en déduit :

$$l \approx \left(c_{n+1} - c_n\right)\sqrt{1 + f'(c_n)^2}$$

et donc :

$$l\sum_n f(c_n) \approx \sum_n \left(c_{n+1} - c_n\right)\sqrt{1 + f'(c_n)^2}\, f(c_n)$$

Faisant tendre l vers 0, on obtient la formule :

$$\textit{aire surface révolution} = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\, dt\,,$$

formule bien connue (cf. par exemple http://mathworld.wolfram.com/SurfaceofRevolution.html), les auteurs ayant simplement oublié d'indiquer qu'elle vient d'Archimède, en suivant exactement sa démonstration.

IV. Que peut-on faire ?

Personnellement, je me soucie assez peu de didactique ; si les étudiants ne comprennent rien à ce qu'on leur enseigne, ce n'est plus mon affaire. Je ne me soucie pas davantage de restaurer les priorités dans les découvertes.

Mais l'approche d'Archimède me paraît intéressante et prometteuse pour divers problèmes que j'ai à résoudre. Cette approche, grossièrement, possède deux caractéristiques :

- Elle "descend en dimension", en passant d'un objet en dimension 3 (une sphère) à un objet en dimension 2 (un disque) ;

- Elle passe d'un objet non plan à un objet plan.

Même si le résultat est global, la démonstration est locale : il y a un recouvrement de la sphère (par de petites bandes) qui se transforme en un recouvrement du disque (par de petites bandes). Pour chaque zone de la sphère, on voit où elle arrive sur le disque, et on saurait définir un "rapport de projection", qui caractérise la conservation de la mesure. Ce rapport est proche de 1 au centre, très mauvais lorsqu'on se rapproche des bords.

Tout ceci est simple pour une sphère et un disque, mais de tels problèmes se rencontrent sous une forme plus complexe, dans divers travaux et contrats que nous menons actuellement. On peut vouloir passer d'une dimension élevée K à une dimension plus faible k. Ceci peut concerner un volume ou une surface.

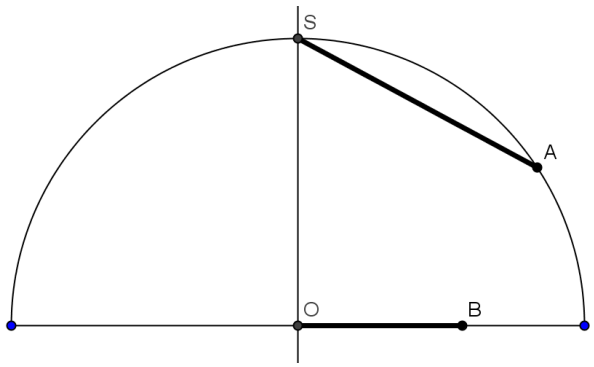
Voici un exemple concret, tiré de travaux que nous avons menés récemment pour l'IRSN (Institut de Radioprotection et de Sûreté Nucléaire). On dispose d'un code de calcul, qui incorpore un grand nombre de paramètres en entrée (disons 40) et qui donne une température en sortie. On cherche les "zones à risque", c'est-à-dire les configurations de paramètres qui peuvent donner lieu à des températures élevées. Le code est très complexe, très lent, si bien que l'on ne peut pas faire autant de runs qu'on le souhaiterait. Disons que la zone à risque est un sous-ensemble quelconque de la sphère unité de l'espace euclidien de dimension 40. On cherche à tirer des points aléatoires dans cette zone, pour mieux l'explorer. Tirer des points au hasard dans une zone est facile lorsque cette zone est un cube, mais pas dans le cas général.

La méthode d'Archimède apporte une solution : on tire les points dans une zone régulière de dimension inférieure, au prorata du rapport de projection, et on les remonte ensuite dans la zone à risque.

Voici un exemple très simple, issu du théorème 2 d'Archimède, ci-dessus. On considère une demi-sphère et le disque associé. La projection usuelle de la demi-sphère sur le disque (projection verticale) n'a pas de propriété d'invariance pour la mesure euclidienne usuelle : un ensemble situé à proximité du haut se projette bien, un ensemble situé à proximité des bords est écrasé. Mais si, en suivant Archimède, on considère l'application $f : A \to B$ définie par le fait que B est dans le même plan vertical que A (plan SOA) et par le fait que $OB = \frac{1}{\sqrt{2}} SA$, alors :

- f est une bijection de la demi-sphère sur le disque

- cette bijection respecte la mesure sur la demi-sphère : pour tout ensemble E contenu dans la demi-sphère, $m(f(E))$ ne dépend que de la mesure $m(E)$ et non de la position de E.



Pour démontrer ceci, il suffit évidemment de se limiter aux bandes entre deux calottes de sommet S.

Soient A_1 et A_2 deux points sur le bord des calottes sphériques. La calotte SA_1 a pour aire $\pi(SA_1)^2$ (Archimède) et la calotte SA_2 a pour aire $\pi(SA_2)^2$. Les images sont respectivement les disques de rayon OB_1 et OB_2, d'aires respectifs $\pi(OB_1)^2 = \frac{\pi}{2}(SA_1)^2$ et $\frac{\pi}{2}(SA_2)^2$. L'aire de la couronne entre les deux disques est donc :

$$\frac{\pi}{2}(SA_2)^2 - \frac{\pi}{2}(SA_1)^2 = \frac{1}{2}\left(aire(calotte\ SA_1) - aire(calotte\ SA_2)\right)$$

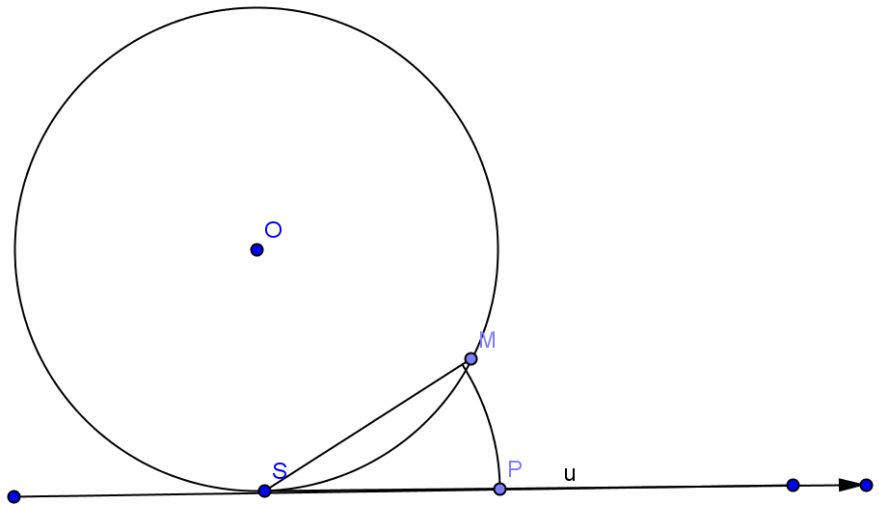
et ce, où que soient les points A_1 et A_2.

Par conséquent, si nous voulons une représentation plane des territoires sur une sphère, qui respecte l'importance relative de ces territoires, il faut utiliser la transformation $f : A \to B$ ci-dessus et non la projection de Mercator. Il semble que, en 2200 ans, les géographes ne s'en soient jamais aperçus !

[Commentaire de M. Pierre Deligne, Institute for Advanced Study, Princeton, New Jersey, USA, 04/06/2010: La mention faite de Mercator dans ce papier sur Archimede me laisse perplexe. Pour moi, Mercator, du revêtement universel de la sphère moins les pôles vers le plan, est la transformation conforme caractérisée par le fait que les méridiens deviennent des droites parallèles "équidistantes" (préservation des distances sur l'équateur). Son avantage est que si un bateau voyage à cap constant, son trajet sur la carte est une droite. Ce n'est pas une projection à partir d'un point. On peut l'obtenir en faisant d'abord une projection stéréographique : projection à partir du pôle Sud sur le plan de l'équateur, identifié au plan complexe, puis en appliquant le logarithme.]

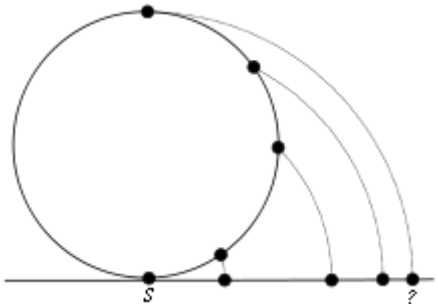
[Commentaires de François Guénard (mai 2010) et Gilles Royer (septembre 2010) :
La "projection d'Archimède" de la sphère sur le plan, définie ci-dessus, coïncide avec la projection de Lambert azimutale.]

Effectivement, pour le voir, modifions les notations, pour adopter celles des géographes (voir Wikipedia : projection de Lambert).



Le globe terrestre repose sur un plan tangent en son pôle sud ; à tout point M, on associe P tel que $SP = SM$ (la normalisation n'est donc plus celle définie plus haut, mais la normalisation d'origine, celle d'Archimède). L'axe des x contient P et S est pris pour origine des axes.

Sous cette forme, la projection d'Archimède coïncide avec celle de Lambert, donnée par Wikipedia : http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_azimuthal_equal-area_projection :



To define the Lambert azimuthal projection, imagine a plane set tangent to the sphere at some point S on the sphere. Let P be any point on the sphere other than the antipode of S. Let d be the distance between S and P in three-dimensional space (not the distance along the sphere surface). Then the projection sends P to a point P' on the plane that is a distance d from S.

Du reste, il ne peut y avoir qu'une seule projection de la sphère sur le plan, ayant S pour point fixe, et conservant les aires (à une normalisation près), puisque l'aire de toute calotte sphérique doit être respectée.

On peut s'étonner (cf. "irritation 1", ci-dessus) que Lambert (1772) ne mentionne pas Archimède et qu'il faille attendre 2010 pour que le lien soit fait entre les deux !

Pour nous, les applications d'une telle projection sont intéressantes : si nous voulons des points aléatoires uniformément distribués sur la demi-sphère (ce qui est difficile à obtenir), il suffit de fabriquer de tels points sur le disque (ce qui est facile) et de les remonter par la transformation inverse $B \to A$.

Un exemple :

Voici la carte de l'hémisphère nord, obtenue par la transformation d'Archimède (travail réalisé par François Guénard, Université de Paris-Sud Orsay, en utilisant Mathematica) :

[Commentaire de M. Doron Zeilberger, Professeur à l'Université Rutgers, New Jersey, USA, 08/05/2010 :
I loved this result, and so would have Archimedes. It is nice that you can say something non-trivial, even by today's standards, about someone who lived 2300 years ago,even if he is one of the greatest geniuses of all times.]

****

Les commentaires peuvent être envoyés à scm.sa@orange.fr.

****