Société de Calcul Mathématique SA

Outils d'aide à la décision

depuis 1995

Séminaire exceptionnel

La "Méthode" d'Archimède et ses applications modernes

par Bernard Beauzamy

La "Méthode" d'Archimède représente un document unique dans l'histoire de l'humanité. Elle permet de relier, par des procédés de pesée issus de la physique, le volume d'une sphère à celle du cylindre englobant. Archimède la considérait comme son chef d'œuvre, puisqu'il a demandé qu'une représentation figurât sur son tombeau. Mais la "Méthode" a été perdue jusqu'en 1906, date à laquelle elle a été retrouvée sous forme de palimpseste. L'influence sur l'évolution des idées en mathématiques a donc été très faible.

Nous présenterons la "Méthode" dans son vocabulaire d'origine. Nous montrerons ensuite, par toutes sortes d'exemples, que les idées de "comparaison par pesée", qui en résultent, sont extrêmement puissantes et permettent des approches entièrement nouvelles dans de nombreux domaines : résolution des systèmes d'équations, probabilités, positionnement par satellite, optique, etc.

le mercredi 5 juillet 2017 à 17 h

En nos locaux, 111 Faubourg Saint Honoré, 75008 Paris
(Métro Saint Philippe du Roule)

I. Présentation

Le texte qui suit est extrait d'une lettre d'Archimède à Eratosthène (né en 276 av JC, mort en 194 av JC). Eratosthène, conservateur de la Grande Bibliothèque d'Alexandrie, est connu pour ses travaux sur les nombres premiers (le "crible d'Eratosthène"), mais surtout, comme nous l'avons raconté dans la Lettre de la SCM no 21, parce qu'il avait conçu une méthode de mesure du rayon terrestre, qui s'est révélée exacte à 10 % près. Cette méthode reposait sur la simple observation suivante : un puits, à Assouan, 800 km plus au sud, était éclairé par les rayons du soleil le 21 juin à midi.

Le texte d'Archimède fait partie d'un livre appelé "La Méthode", parce que l'auteur y explique comment il est parvenu aux résultats qui sont présentés dans les autres livres.

"J'ai jugé à propos de te décrire, et de te développer dans ce même livre, les propriétés caractéristiques d'une méthode qui te permettra d'aborder certaines propositions mathématiques par le biais de la mécanique [...]. Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me seront pas venues à l'esprit" [1], page 83-84.

Ouvrages consultés :

[1] Archimède, Œuvres : Des corps flottants, Stomachion, La Méthode, Le Livre des Lemmes et le Problème des Bœufs. Texte établi et traduit par Charles Mugler, Paris, Les Belles Lettres, 2002.
[2] Sir Thomas Heath "The Method of Archimedes", Cosimo Classics, New York, 1897, réédition 2007.

Nous suivons essentiellement la présentation de Sir Thomas Heath, qui a l'avantage d'utiliser des notations mathématiques d'aujourd'hui.

Le livre "La Méthode" fait partie du "palimpseste", écrit au Xème siècle, gratté au XIIIème, perdu, puis redécouvert à Constantinople en 1906 et publié à partir de photographies par le philologue danois Johan Ludvig Heiberg (1854-1928), puis traduit du grec en anglais par Thomas Heath. Perdu à nouveau à partir de 1906, il a été retrouvé et mis en vente chez Christie's en 1998 et restauré par une équipe aux USA (voir la Lettre de la SCM no 47).
(voir http://fr.wikipedia.org/wiki/Palimpseste_d'Archimède)

D'un point de vue mathématique, la version reconstituée par Heiberg et traduite par Heath paraît tout à fait complète : les énoncés manquants et les morceaux manquants dans les démonstrations sont reconstitués de manière satisfaisante. Le travail réalisé par l'équipe américaine, à l'aide de Rayons X, à partir de 1998, connu sous le nom de "projet palimpseste" (http://www.archimedespalimpsest.org/) est certes utile parce qu'il permet d'améliorer les méthodes pour déchiffrer les manuscrits anciens, mais, sur le plan mathématique, il n'apporte pas grand'chose.

II. Le cylindre et la sphère

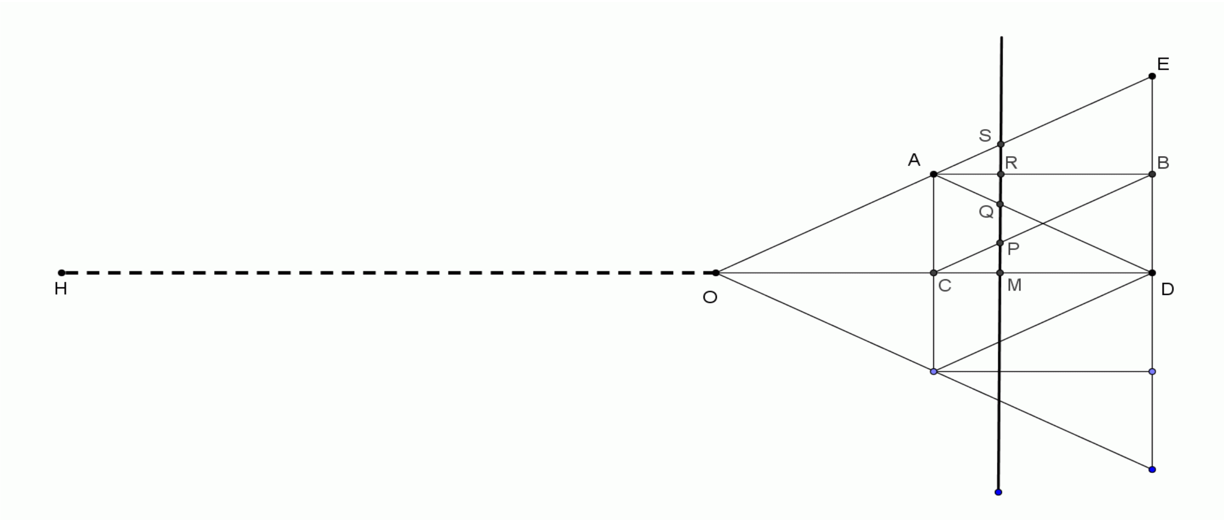
Avant de donner l'énoncé du théorème principal, nous avons besoin de résultats intermédiaires. La proposition qui suit est utilisée par Archimède sans démonstration.

Proposition 1. - *Le centre de gravité d'un cône est situé aux 3/4 de l'axe à partir du sommet.*

Démonstration

Nous donnerons une démonstration en utilisant précisément "la Méthode", ce qui permettra au lecteur de se familiariser avec les concepts.

Considérons la figure suivante, représentant un cône de sommet O, le point C est au milieu de l'axe et $CH = 4OC.$ Le point M se déplace entre C et $D.$



Les triangles OCA et CMP sont semblables, et donc :

$$\frac{AC}{OC} = \frac{MP}{CM} \tag{1}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\frac{OC}{CM} = \frac{AC}{MP} \tag{2}$$

Mais $AC = MR$ et $OC = \dfrac{CH}{4}$, donc (2) est équivalent à :

$$\frac{CH}{CM} = \frac{4MR}{MP} \tag{3}$$

Par ailleurs :

$MS - MQ = QS = 2MP, \quad MS + MQ = 2MR$

et donc :

$$MS^2 - MQ^2 = (MS - MQ)(MS + MQ) = 4MP \times MR \tag{4}$$

Il résulte de (3) et (4) que :

$$\frac{CH}{CM} = \frac{MS^2 - MQ^2}{MP^2} \tag{5}$$

Ecrivons (5) sous la forme :

$$CH \times MP^2 = CM \times MS^2 - CM \times MQ^2 \tag{6}$$

Nous obtenons donc :

$$CH \times aire\_cercle(MP) = CM \times aire\_cercle(MS) - CM \times aire\_cercle(MQ)$$

Considérons ces cercles comme de fines tranches d'un solide, de densité 1. Représentons-nous la droite HOD comme une barre, mobile autour de C. La quantité $CM \times aire\_cercle(MS)$ est le moment par rapport à C du poids du solide constitué par le cercle MS. De même, la quantité $CM \times aire\_cercle(MQ)$ est le moment par rapport à C du poids du solide constitué par le cercle MQ. La quantité $CH \times aire\_cercle(MP)$ est le moment par rapport à C du poids du solide constitué par le cercle MP si le centre de gravité de ce solide était en H.

Faisons varier M entre ses positions extrêmes C et D.

- Le cercle de rayon MP génère le petit cône CBD cône noté C_1 ;
- Le cercle MS génère le tronc de cône $CAED$;
- Le cercle MQ génère le cône renversé (pointe à droite) CAD noté C_3.

Il en résulte que le cône C_1, avec son centre de gravité en H est en équilibre autour de C avec le cône tronqué $CAED$, où il est, si l'on retranche le cône C_3, où il est.

Nous notons C_2 le cône complet OED.
Mais retrancher le cône C_3, où il est, revient à ajouter le cône OAC, puisque celui-ci est situé symétriquement par rapport à C, et le cône OAC plus le cône tronqué $CAED$ est tout simplement le cône OED.

Nous avons donc obtenu :

Le cône C_1, avec son centre de gravité en H, est en équilibre autour de C avec le cône C_2.

Notons G_2 le centre de gravité de C_2 ; nous avons :

$$CH \times vol(C_1) = CG_2 \times vol(C_2)$$

Or nous savons que : $vol(C_2) = 8\, vol(C_1)$ (hauteur double et rayon de base double).

et comme $CH = 4OC,$ nous en déduisons :

$CG_2 = \frac{1}{2}OC = \frac{h}{4}$ ($h = OD =$ hauteur du cône) et finalement :

$$OG_2 = OC + CG_2 = \frac{h}{2} + \frac{h}{4} = \frac{3h}{4}$$

Ce qui prouve la Proposition.

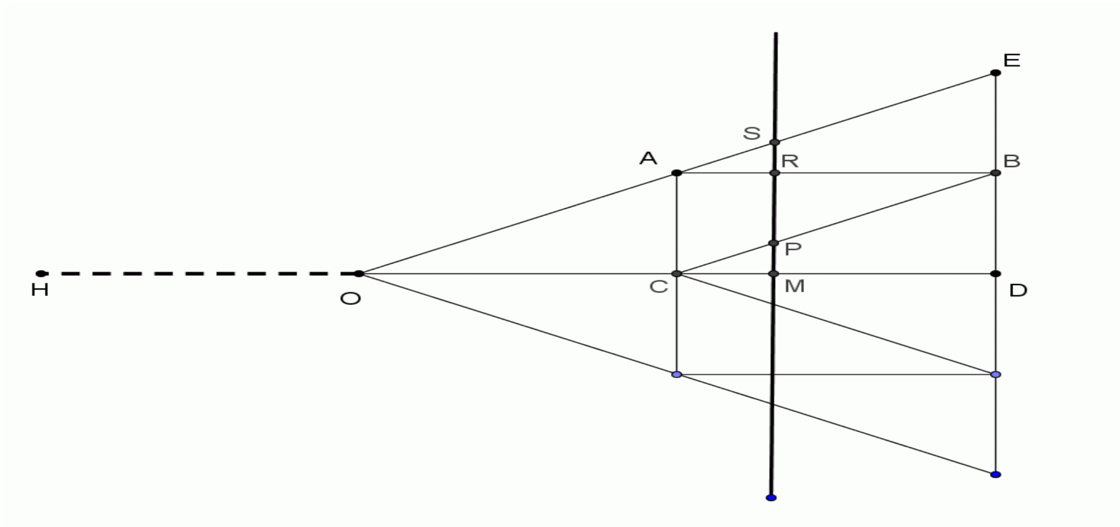
Archimède utilise aussi un résultat pour lequel il cite Euclide :

Proposition 2 (Eudoxe de Cnide, 408 av JC - 355 av JC, cité par Euclide, XII, 10)

Un cylindre a un volume triple de celui du cône de révolution de même base et de même hauteur.

Démonstration

Nous allons appliquer la Méthode à la figure suivante, où $OC = OH$:



Nous allons montrer que :

$$\frac{CO}{CM} = \frac{1}{2}\frac{MS^2 - MP^2 - MR^2}{MP^2} \qquad (1)$$

En effet $MS = MP + PS = MP + AC$ et $MR = AC$; par conséquent :

$$MS^2 - MP^2 - MR^2 = \left(MP + AC\right)^2 - MP^2 - AC^2 = 2MP.AC$$

L'équation (1) est donc équivalente à $\dfrac{CO}{CM} = \dfrac{AC}{MP}$ ou encore $\dfrac{OC}{AC} = \dfrac{MC}{PM}$, qui est bien réalisée puisque les triangles OCA et CMP sont semblables ; ceci établit (1).

Soit H tel que $CH = 2CO$, alors :

$$\frac{CH}{CM} = \frac{MS^2 - MP^2 - MR^2}{MP^2}$$

c'est-à-dire :

$$CH \times MP^2 = CM \times MS^2 - CM \times MP^2 - CM \times MR^2 \qquad (2)$$

Considérons le cercle de rayon MP comme un solide infiniment mince, mais pesant (convertissons le volume en poids, en décidant par exemple que la densité est 1), et de même pour les cercles de rayon MS, MR.

Le terme $CM \times MS^2$ peut être considéré comme le moment par rapport à C de la force résultant du poids du cercle de rayon MS et de même pour les termes $CM \times MP^2$ et $CM \times MR^2$.

Le terme $CH \times MP^2$ peut être considéré comme le moment par rapport à C de la force résultant du poids du cercle de rayon MP, pourvu que le centre de gravité de celui-ci soit mis en H.

L'équation (2) peut être vue comme une équation d'équilibre : le cercle de rayon MP, placé avec son centre de gravité en H équilibre le cercle de rayon MS placé où il est, si l'on retranche les moments des cercles MP et MR placés où ils sont ; la barre HCD est en équilibre autour de C.

Déplaçons maintenant le point M entre C et D.

- Le cercle de rayon MP engendre le cône CBD, noté C_1 ;
- Le cercle de rayon MS engendre le tronc de cône $CAED$, noté C_2 ;
- Le cercle de rayon MR engendre le cylindre de base CA, noté C_3.

Il en résulte que le cône C_1, avec son centre de gravité en H est en équilibre par rapport à C avec le cône tronqué C_2, où il est, si l'on retranche le cône C_1 et le cylindre C_3 là où ils sont.

Nous obtenons donc, en notant respectivement G_1, G_2, G_3 les centres de gravité du cône C_1, du tronc de cône C_2 et du cylindre C_3 :

$$2CO.vol(C_1) = CG_2.vol(C_2) - CG_1.vol(C_1) - CG.vol(C_3) \qquad (3)$$

Calculons la position du centre de gravité G_2 du tronc de cône C_2.

On a $vol(cône(OED)) = 8vol(C_1)$, puisque toutes les dimensions sont multipliées par 2, d'où $vol(C_2) = 7vol(C_1)$, puisqu'on a tronqué à AC.

Le cône complet OED est la réunion du cône OCA, noté C_1' et de C_2 ; son centre de gravité, noté G, est donc le barycentre de leurs centres de gravité, affectés de leurs poids respectifs, et donc :

$$OG = \frac{1}{8}OG_1' + \frac{7}{8}OG_2 \qquad (4)$$

Notons $h = OD$ la hauteur totale du cône OED. On sait, d'après la Proposition 2, que $OG = \frac{3h}{4}$ et $OG_1' = \frac{3h}{8}$. Donc, d'après (4), $OG_2 = \frac{45}{56}h$ et $CG_2 = OG_2 - OC = \frac{45}{56}h - \frac{h}{2} = \frac{17}{56}h$.

On sait que $CG = \frac{h}{4}$. On déduit de (4) :

$$h.vol(C_1) = \frac{17h}{56}.7vol(C_1) - \frac{3h}{8}.vol(C_1) - \frac{h}{4}.vol(C_3) \qquad (3)$$

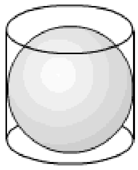
$$vol(C_3) = 4 \times vol(C_1)\left(-1 + \frac{17}{56}.7 - \frac{3}{8}\right) = 3vol(C_1)$$

ce qui prouve la Proposition.

Théorème (Archimède). - Comparaison de la sphère et du cylindre.

Le volume du cylindre englobant une sphère est $\frac{3}{2}$ *du volume de la sphère.*

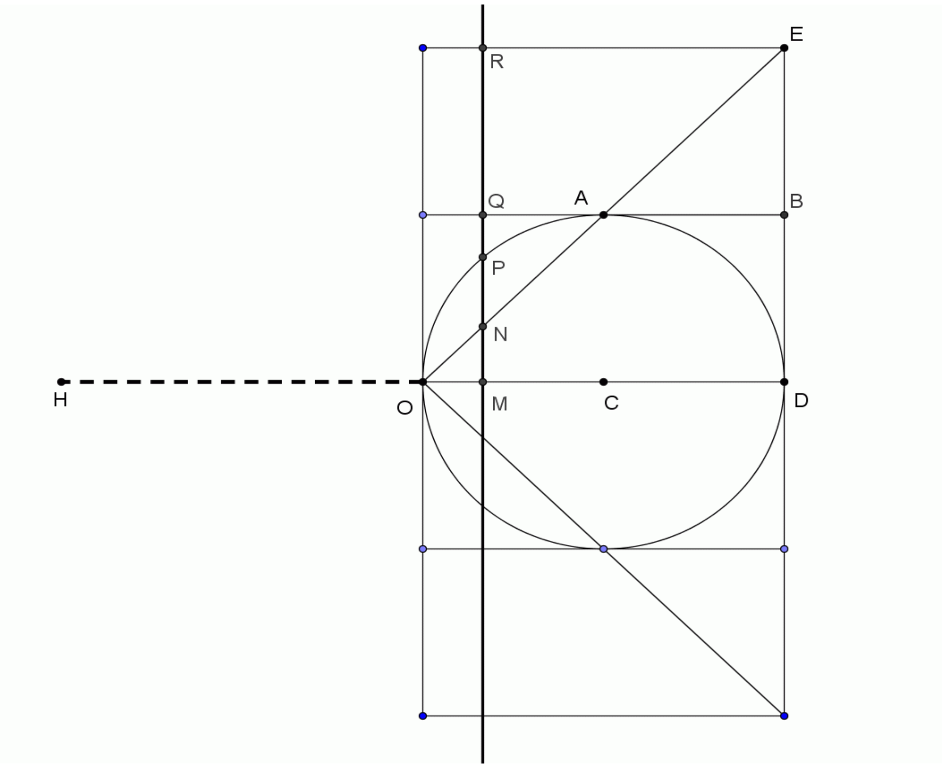
"Mais, quoiqu'il eût fait plusieurs inventions très belles, il pria, dit-on, ses parents et ses amis de ne mettre, après sa mort, sur son tombeau, qu'une sphère inscrite dans un cylindre, et de marquer, dans l'inscription, de quelle quantité, dans ces deux solides, le contenant surpasse le contenu".



Plutarque, à propos d'Archimède, in "la vie de Marcellus"

Démonstration du théorème

Dans la figure ci-dessous, nous avons une coupe verticale d'une figure 3 d, consistant en une sphère, de rayon r, coupée par le cercle OAD et un cône OED, dont l'angle au sommet est droit.



Le plan vertical RM coupe la sphère selon un cercle vertical de rayon MP et le cône selon un cercle vertical de rayon MN.

Le point H est le symétrique de D par rapport à O et donc $OH = OD = 2r$.

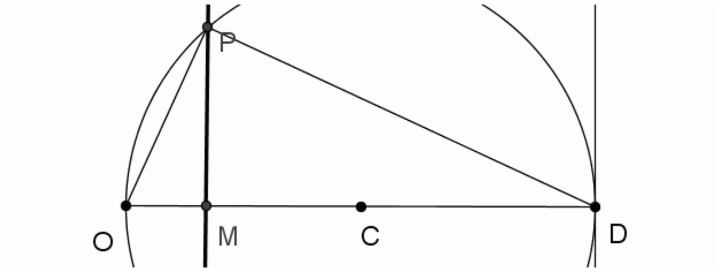
Nous allons montrer que, quelle que soit la position du point M :

$$\frac{OH}{OM} = \frac{MR^2}{MN^2 + MP^2} \qquad (1)$$

En effet:

$$\frac{OH}{OM} = \frac{OD}{OM} = \frac{OD^2}{OM \times OD}$$

Montrons que $OM \times OD = OP^2$. Les deux triangles OMP et OPD sont semblables ; donc $\frac{OM}{OP} = \frac{OP}{OD}$ (petit côté / hypothénuse). D'où notre assertion.



et $OP^2 = OM^2 + MP^2$ (théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OMP). En outre, $OD = MR$ et $OM = MN$. D'où (1).

Ecrivons (1) sous la forme :

$$OH \times MN^2 + OH \times MP^2 = OM \times MR^2 \qquad (2)$$

Il en résulte que :

$$OH \times \left(aire\_cercle\_rayon(MN) + aire\_cercle\_rayon\left(MP\right)\right) = OM \times aire\_cercle\_rayon\left(MR\right)$$

(3)

Considérons le segment HD comme la barre d'une balance, en équilibre autour de son milieu O.

Considérons les cercles ci-dessus comme des solides infiniment minces, mais pesants : convertissons le volume en poids, en décidant par exemple que la densité est 1.

Il résulte de l'équation (3) que si le cercle de rayon MN et le cercle de rayon MP sont placés avec leur centre de gravité en H, ils équilibrent le cercle de rayon MR, placé où il est.

Déplaçons maintenant le point M sur l'horizontale OD. Le cercle de rayon MN engendre le cône OED ; le cercle de rayon MP engendre la sphère OAD ; le cercle de rayon MR engendre le cylindre de base DE. Nous obtenons donc, considérant tous les volumes comme des solides pesants :

Le cylindre de base DE, là où il est, est en équilibre avec la sphère OAD et le cône OED, si les centres de gravité de ces deux derniers sont placés en H.

Le centre de gravité du cylindre de base DE est en C, milieu de OD. Nous en déduisons :

$$OC \times vol(cylindre) = OH \times vol(sphère) + OH \times vol(cône)$$

et comme $OH = 2OC$,

$$vol(cylindre) = 2\,vol(sphère) + 2\,vol(cône)$$

et d'après la Proposition 2 :

$$vol(cylindre) = 2\,vol(sphère) + \frac{2}{3}vol(cylindre)$$

et donc :

$$\frac{1}{3}vol(cylindre) = 2\,vol(sphère)$$
$$vol(cylindre) = 6\,vol(sphère)$$

Mais le cylindre englobant la sphère a pour rayon DB et son volume est le quart de celui du cylindre de rayon BE. Nous obtenons donc :

$$vol(cylindre_{BD}) = \frac{3}{2}\,vol(sphère)$$

comme annoncé.

[Commentaire BB : Archimède se déclarait insatisfait de cette méthode, qu'il considérait comme peu rigoureuse ; c'est pourquoi il a voulu ensuite redémontrer les mêmes résultats par des méthodes géométriques. C'est probablement l'équation (1) qui lui posait un problème. Mais en langage moderne, elle peut être rendue parfaitement rigoureuse, en écrivant :

$$OH\left(S_1 + S_2\right)dh = OM \times S_3\;dh$$

où S_1, S_2, S_3 sont les surfaces respectives des trois cercles et *dh* un élément de longueur entre *S* et *S+dh*. En d'autres termes, pour un mathématicien d'aujourd'hui, les méthodes introduites par Archimède à partir de considérations de mécanique ne sont en rien moins rigoureuses que les autres.]

III. Extensions

Comme nous l'avons déjà dit, les méthodes géométriques introduites par Archimède se sont révélées fécondes, puisqu'elles sont à la base du calcul intégral et du calcul différentiel. Mais les méthodes reposant sur des considérations de mécanique n'ont, à notre connaissance, jamais été reprises et son souhait, rappelé ci-dessus "*Je suis persuadé, en effet, que des chercheurs, soit de notre époque, soit de l'avenir, trouveront, par l'application de la méthode que j'aurai fait connaître, encore d'autres propositions qui ne me seront pas venues à l'esprit"* est, à ce jour, resté lettre morte.

Une première raison tient peut-être au fait que le "palimpseste", où figure l'unique copie connue de la "Méthode", n'a été découvert qu'en 1906. On ignore quand le manuscrit d'origine avait été écrit, ni quand il a été gratté et recouvert d'autres textes (vers le Xème siècle, semble-t-il). Newton et Gauss, qui avaient lu les autres textes d'Archimède, n'ont pas pu lire la "Méthode". Mais, à l'inverse, il est clair que, pendant les 400 ans qui ont suivi la mort d'Archimède, elle n'a pas eu la même diffusion que ses autres œuvres ; il y a eu peu de copies et la plupart se sont perdues.

Une autre raison tient sans doute au caractère très particulier de ces méthodes, qui ne ressemblent à rien de ce que nous faisons aujourd'hui, et peut-être aussi au fait qu'elles semblent ne s'appliquer qu'à des cas très spécifiques : un cône, une sphère, un hyperboloïde, etc. Même si Archimède donne de nombreux exemples, chacun d'eux tient du miracle. En outre, il faut, pour convertir le rapport OH/OM en un quotient de carrés (ce qui constitue la base même de la Méthode, puisqu'on veut introduire des cercles) une dextérité qui s'est perdue depuis environ 2 200 ans. Le lecteur constate donc que les exemples traités par Archimède sont nombreux, mais en même temps il est incapable d'en inventer un seul autre, qui soit nouveau. Mais ceci n'est qu'apparent, comme on va le voir plus loin. En se familiarisant avec la Méthode, on en découvre progressivement les possibilités d'application.

La méthode d'Archimède permet, pour un solide complexe, d'établir une relation entre le volume et la position du centre de gravité, par référence à un solide simple.

IV. Applications modernes

Archimède est généralement considéré comme l'un des plus grands génies de tous les temps ; la Méthode est le fil conducteur de ses découvertes. Il serait donc vraiment étonnant qu'une idée aussi remarquable ne puisse être utilisée par d'autres (comme lui-même le souhaitait), même si à ce jour elle est restée inexplorée.

A ce jour, notre réflexion reste très préliminaire ; avec quelques années de retard (environ 2200), nous venons à peine de commencer à travailler sur ces questions. Nous voyons cependant plusieurs pistes.

A. Robustesse

On peut se dire que, aujourd'hui, tout ceci n'a pas grand intérêt, car nous avons des moyens de calcul, qui permettent de calculer précisément un volume et la position d'un centre de gravité. Archimède ne disposait pas de ces moyens de calcul, et il n'avait même pas l'électricité !

Mais en quoi l'approche d'Archimède reste-t-elle d'actualité ? Tout simplement parce qu'elle est plus robuste. Lorsque nous calculons la position d'un centre de gravité, au moyen d'une discrétisation et d'un maillage, nous commettons une erreur, qui est rarement évaluée ; nous ne prenons pas la peine de faire le bilan correct de la dépendance par rapport aux erreurs de mesure et par rapport au maillage. Il s'agit d'un calcul numérique complexe, dont les étapes ne sont pas faciles à maîtriser.

Un exemple évident est le suivant : supposons que l'on cherche à calculer le moment par rapport à O résultant de masses m_i mises en des points M_i (un solide discrétisé). Effectuer la "pesée d'Archimède" pour chaque masse séparément revient à calculer $\sum m_i OM_i$; c'est beaucoup plus robuste (i.e. insensible aux incertitudes) que de déterminer d'abord le centre de gravité $G,$ puis de multiplier OG par la masse totale.

La méthode d'Archimède ne relève pas du calcul numérique, c'est pourquoi elle est plus robuste, en ce sens que le résultat sera moins sensible aux erreurs de mesure. Elle se contente de dire que le solide compliqué est en équilibre avec un solide plus simple, mis en un certain endroit.

Bien entendu, elle ne se limite pas à la pesée au sens usuel, mais inclut plus généralement ce qu'on appellera la synthèse de l'information. En voici un exemple moderne.

Exemple moderne : la gestion de la production d'électricité

La "gestion de la production", par EDF, consiste à répartir la production d'électricité entre les différentes centrales. Le besoin dépend évidemment de la température et EDF utilise une "température moyenne", calculée à partir de relevés fournis par Météo France ; à partir de cette température moyenne, EDF évalue la demande, au moyen d'une formule compliquée qui fait intervenir divers autres paramètres.

Le système serait plus robuste, c'est-à-dire moins dépendant d'une erreur commise par Météo France, si EDF partait de températures en une dizaine de régions, et calculait la demande par région. On sommerait ensuite ces demandes partielles pour obtenir la demande totale (le réseau étant maillé, on ne produit pas par région, mais on répartit par région une production totale).

Il est amusant de constater que les progrès dans la gestion de la production de l'électricité dépendent, non de la capacité à calculer plus vite (comme on le croit souvent), mais de la capacité à utiliser les idées d'un homme mort plus de deux mille ans avant les applications industrielles et domestiques de l'électricité.

V. Conclusion

Les machines inventées par Archimède (poulies, palans, vis, et toutes ses machines de défense) n'ont plus aujourd'hui d'autre intérêt qu'historique. Il en est de même de ses contributions à la physique : mécanique statique, hydrostatique, etc. Mais les mathématiques ont ceci de singulier, au milieu des autres sciences et techniques, que leur contenu universel résiste bien aux épreuves du temps. Les théorèmes d'Archimède ont un sens précis pour le mathématicien d'aujourd'hui, et ce sens précis est celui-là même qu'Archimède voulait leur donner.

Ses énoncés résistent même aux imprécisions de traduction : lorsque Archimède définit la convexité (notre exposé de mai 2010), il le fait exactement comme nous aujourd'hui, et même si le traducteur écrit "concave", n'importe quel mathématicien professionnel rectifie immédiatement.

Cette persistance, face aux évolutions, n'est vraie pour aucune autre discipline scientifique ; à relire la physique ou la chimie, de l'Antiquité ou du Moyen-Âge, on a le sentiment d'une succession d'énoncés creux et ampoulés, sans aucune valeur scientifique.

Mais le plus stupéfiant est évidemment que la pensée d'Archimède soit encore féconde aujourd'hui et qu'elle puisse nous donner des outils nouveaux. On peut vouloir donner une explication : il a été souvent traduit, jamais compris, encore moins étudié. Mais qu'importe l'explication ?

Contentons-nous d'admirer et, surtout, de tirer parti de son legs, dans la mesure de nos moyens, puisque, par une étrange bénédiction de l'histoire, il nous est donné d'y avoir accès.

VI. Pour en savoir plus

Bernard Beauzamy : Archimedes' Modern Works. Ouvrage édité et commercialisé par la Société de Calcul Mathématique SA. ISBN 978-2-9521458-7-9, ISSN 1767-1175. Relié, 220 pages, août 2012. http://scmsa.eu/archives/SCM_AMW_order.htm