Société de Calcul Mathématique SA

Outils d'aide à la décision

depuis 1995

Application de la méthode d'Archimède à la résolution probabiliste de problèmes inverses linéaires

Bernard Beauzamy

mars 2019

English Summary

We consider an industrial process, supposed to be linear: it may be represented by a matrix A. The inputs are data $(x_1,...,x_n)$, for instance quantities of raw material used by the process, and N observations were made, producing a vector of observations B. These observations are affected by uncertainties. The matrix A (tuning of the parameters) is supposed to be perfectly known. Due to the uncertainties upon B, there is no choice of $(x_1,...,x_n)$ which satisfies exactly $AX = B$.

Such problems are usually solved the following way: one chooses the X for which the Euclidean distance $\|AX - B\|_2$ is minimal. However, the choice of the Euclidean norm is artificial and cannot be supported by any legitimate argument, except that the computations are easy.

Instead of this approach, we show how to produce a probability law on X, which will help the industry make the most favorable choice. This is done the following way: we generate artificially, using a computer, many versions of X and, for each of them, compare the value of AX with the prescribed B. This approach is derived from Archimedes' Method, which, by definition, means that one generates a known signal and compares it with the signal under investigation (see [AMW]). This is a good example where exploration using a computer is necessary, since, when N is large (which is always the case in practice), the simulation cannot be done by hand. Our method does not only provide an optimum, but also a whole set of possibilities: if, for instance, the tuning is not set at the best value, the industry may evaluate the consequences, which was not possible with the Euclidean optimization.

1. Présentation du problème

On considère un process industriel, que l'on suppose linéaire : il admet en entrée des données $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ et retourne en sortie une quantité $b,$ qui, en principe, dépend linéairement des données d'entrée. Mais ce process comporte un certain nombre de réglages : les paramètres sur lesquels l'industriel peut agir.

On a procédé à l'enregistrement de N répétitions du process ; les valeurs en sortie sont mesurées avec une certaine incertitude. Les paramètres sont convenablement mesurés à chaque fois et on voudrait reconstituer les données d'entrée $\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

Mathématiquement, on se trouve en présence d'un problème de type $AX=B,$ où A est une matrice à N lignes et n colonnes (beaucoup plus d'équations que d'inconnues), X est un vecteur colonne de taille n (les inconnues) et B un vecteur colonne de taille $N.$ L'opérateur A agit donc de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^N.$ Les équations étant trop nombreuses sont généralement incompatibles entre elles : il n'existe en général aucune solution exacte.

On définit une loi de probabilité sur X de la manière suivante :

$$P\left(X\right)=P\left(AX=B\right)$$

Faisons en effet un choix déterministe précis pour $X.$ Le produit AX sera donc un vecteur colonne précis, noté $C=\left(c_1,\ldots,c_N\right)$; pour c_1 on évalue la probabilité, notée p_1, qu'il soit au voisinage de b_1 (au moyen de la loi de probabilité sur chaque composante de $B,$ supposée connue) et ainsi de suite pour $c_2,\ldots,c_N$; la probabilité $P\left(X\right)$ sera le produit $p_1\ldots p_N$; après quoi, il faut renormaliser en divisant par la somme des probabilités lorsque X prend toutes les valeurs possibles.

2. Analyse d'un exemple

Considérons la situation simple : $n=3$; on fait 5 mesures. La matrice A est :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Si les trois valeurs en entrée sont $\left(1,2,3\right)$, pour AX on devrait trouver :

$$B = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \\ -4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

On trouve en réalité B :

$$B = \begin{pmatrix} 4.66 \\ 5.46 \\ 1.42 \\ -3.05 \\ 15.94 \end{pmatrix}$$

La question est : quelle valeur attribuer à X ?

Admettons que l'on sache que, pour la première coordonnée et pour toutes les autres, la valeur mesurée β se situe entre $\frac{1}{2}$ de la valeur vraie et $\frac{3}{2}$ de la valeur vraie :

$$\frac{1}{2}b \le \beta \le \frac{3}{2}b$$

et donc :

$$\frac{2}{3}\beta \le b \le 2\beta$$

On retiendra donc, pour la valeur vraie (b) une loi uniforme sur l'intervalle $\left[\frac{2\beta}{3}, 2\beta\right]$.

Nous avons donc un ensemble d'inégalités :

$$\frac{2}{3} \times 4{,}66 \le x + y + z \le 2 \times 4{,}66$$
$$\frac{2}{3} \times 5{,}46 \le 2x - y + 3z \le 2 \times 5{,}46$$
$$\frac{2}{3} \times 1{,}42 \le x - 2y + 2z \le 2 \times 1{,}42$$
$$\frac{2}{3} \times -3{,}05 \le x - y - z \le 2 \times -3{,}05$$
$$\frac{2}{3} \times 15{,}94 \le -x + 2y + 5z \le 2 \times 15{,}94$$

On en déduit des bornes pour chacune des variables : en faisant la somme de (1) et (4) :

$0.54 \le x \le 1.61$

et de même pour z : (3) et (5) :

$1.62 \le z \le 4.87$

Sommant (4) et (5) :

$8.59 \le y + 4z \le 25.78$

$8.59 - 4z \le y \le 25.78 - 4z$

$-10.89 \le y \le 19.30$

Dans le parallélépipède défini par les trois conditions :

$0.54 \le x \le 1.61$ (largeur 1.07)
$-10.89 \le y \le 19.30$ (largeur 30.19)
$1.62 \le z \le 4.87$ (largeur 3.25)

nous allons jeter au hasard (loi uniforme) un très grand nombre de points (x, y, z) et calculer pour chacun la valeur $B = AX$. Nous regardons si :

$$\frac{4,66}{3} \le b_1 \le 4,66$$

et de même pour les quatre autres coordonnées. Si les 5 conditions sont satisfaites, nous conservons le point, sinon, nous l'éliminons. L'ensemble des points conservés détermine une loi de probabilité sur un sous-ensemble de R^3. Voici ce qu'on trouve pour $1.62 \le z < 2.62$:

	-1,89	-0,89	0,11	1,11	2,11	3,11	4,11	5,11	6,11	7,11	8,11	9,11	10,11	11,11	12,11	13,11
0,54	0	0,0005	0,0016	0,0026	0,0028	0,0027	0,0026	0,0028	0,0027	0,0027	0,0028	0,0026	0,0016	0,0006	0,0000	0
0,64	0	0,0005	0,0015	0,0025	0,0027	0,0027	0,0027	0,0026	0,0026	0,0026	0,0027	0,0026	0,0018	0,0007	0,0000	0
0,74	0	0,0005	0,0016	0,0025	0,0027	0,0025	0,0027	0,0027	0,0025	0,0027	0,0028	0,0026	0,0017	0,0007	0,0000	0
0,84	0	0,0004	0,0014	0,0025	0,0028	0,0027	0,0028	0,0026	0,0028	0,0028	0,0028	0,0027	0,0019	0,0008	0,0000	0
0,94	0	0,0004	0,0015	0,0025	0,0026	0,0027	0,0028	0,0028	0,0028	0,0028	0,0027	0,0027	0,0019	0,0009	0,0000	0
1,04	0	0,0004	0,0014	0,0025	0,0026	0,0027	0,0027	0,0027	0,0025	0,0028	0,0027	0,0026	0,0019	0,0009	0,0001	0
1,14	0	0,0003	0,0015	0,0025	0,0027	0,0028	0,0027	0,0027	0,0027	0,0026	0,0029	0,0027	0,0021	0,0010	0,0001	0
1,24	0	0,0002	0,0013	0,0023	0,0027	0,0028	0,0028	0,0029	0,0027	0,0026	0,0027	0,0027	0,0022	0,0010	0,0001	0
1,34	0	0,0003	0,0012	0,0023	0,0028	0,0027	0,0027	0,0026	0,0027	0,0026	0,0026	0,0026	0,0021	0,0012	0,0001	0
1,44	0	0,0002	0,0012	0,0024	0,0026	0,0026	0,0027	0,0027	0,0027	0,0028	0,0026	0,0027	0,0022	0,0011	0,0001	0
1,54	0	0,0001	0,0008	0,0015	0,0019	0,0018	0,0019	0,0018	0,0018	0,0020	0,0018	0,0018	0,0016	0,0008	0,0001	0
1,64	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

En abscisse, la valeur de y par tranches de largeur 1 ; en ordonnée la valeur de x par tranches de largeur 0.1. Dans la case (i, j) la probabilité correspondante. Par exemple, dans la case $i = 0.64,\ \ j = -0.89,$ on lit 0.0005; c'est la probabilité que l'on ait simultanément :

$0.64 \le x < 0.74$, $-0.89 \le y < 0.11$, $1.62 \le z < 2.62$.

Situation 2

Les réglages ne sont pas parfaitement connus : ils sont entachés d'incertitude.

Cette fois, on a observé X et B (avec éventuellement des erreurs de mesure) et on voudrait reconstituer A. Mais on ne connaît, pour la première équation, que $a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n$; il est donc impossible de reconstituer séparément $a_{1,1},...,a_{1,n}$. Il faut alors supposer que les réglages du process n'ont pas varié pendant au moins n expériences (ce qui est généralement le cas en pratique).

3. Bibliographie

[AMW] Beauzamy, Bernard : Archimedes' modern works. Société de Calcul Mathématique SA, Paris, 2012. 220 pp. ISBN: 978-2-9521458-7-9.