Société de Calcul Mathématique SA
Outils d'aide à la décision
depuis 1995

BB_Corrélations_Quantiques

31 mai 2019

Analyse critique du livre "L'impensable hasard", par Nicolas Gisin

par Bernard Beauzamy

I. Analyse du "Jeu de Bell"

Commençons par l'analyse du "jeu de Bell", page 30. La description qui en est faite dans le livre est assez confuse ; essayons de clarifier le vocabulaire.

On dispose de deux variables aléatoires X,Y prenant les valeurs 0 ou 1 : elles désignent le choix fait par Alice et Bob de pousser une manette vers la droite ou la gauche.

A. Cas où les variables sont indépendantes

Lorsque Alice pousse sa manette, un résultat noté A s'affiche ; il peut dépendre ou non de X. De même, lorsque Bob pousse sa manette, un résultat noté B s'affiche ; il peut dépendre ou non de Y.

Les deux joueurs sont satisfaits si $A+B=XY$ où $A+B$ est compté modulo 2. On notera Z la variable qui vaut 1 s'ils sont satisfaits, 0 sinon.

Il ne s'agit pas d'un jeu où les joueurs s'opposent, mais d'un jeu collaboratif.

Lemme 1. – *Si les variables X,Y sont indépendantes et les variables A,B indépendantes de X,Y et indépendantes entre elles, on a :*

$$P(Z=1)=\frac{1}{2}$$

Démonstration du lemme 1

Notons $S=A+B$ modulo 2 et $P=XY$. On a les quatre situations :

Y\X	0	1
0	P=0	P=0
1	P=0	P=1

Dans chacune des cases, à cause de l'indépendance, S prend la valeur 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et la valeur 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$. On a:

$$\begin{aligned} P(S=P) &= P(S=P \text{ et } P=0)+P(S=P \text{ et } P=1) \\ &= P(S=P \mid P=0)P(P=0)+P(S=P \mid P=1)P(P=1) \\ &= \frac{1}{2}\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\frac{1}{4}=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 1.

Lemme 2. – *Si les variables X,Y sont indépendantes et si $A=X$, $B=Y$, on a :*

$$P(Z=1)=\frac{1}{4}$$

Démonstration du lemme 2

Notons $S=A+B=X+Y$ modulo 2 et $P=XY$. On a les quatre situations :

Y\X	0	1
0	S=0, P=0	S=1, P=0
1	S=1, P=0	S=0, P=1

et donc $S=P$ seulement dans la première situation, probabilité $\frac{1}{4}$. Ceci prouve le lemme 2.

Le résultat est le même si $A=1-X$, $B=1-Y$.

Lemme 3. – *Si les variables X,Y sont indépendantes et si $A=X$, $B=1-Y$, on a :*

$$P(Z=1)=\frac{3}{4}$$

Démonstration du lemme 3

Notons $S=A+B=1+X-Y$ modulo 2 et $P=XY$. On a les quatre situations :

Y\X	0	1
0	S=1, P=0	S=0, P=0
1	S=0, P=0	S=1, P=1

et donc $S = P$ seulement dans les trois dernières situations, probabilité $\frac{3}{4}$. Ceci prouve le lemme 3.

Le résultat est le même si $A = 1 - X$, $B = Y$.

Proposition 4. – *Si* X, Y *sont indépendantes, quelles que soient les stratégies adoptées pour* A, B, *on aura toujours* $P(Z = 1) \leq \frac{3}{4}$.

Démonstration de la proposition 4

On a :

Y\X	0	1
0	P=0	P=0
1	P=0	P=1

Pour que $Z = 1$, il faut que $A + B = 0$ dans les trois premières cases, que $A + B = 1$ dans la quatrième. Mais A est par définition indépendant de Y et B est par définition indépendant de X. La valeur de A est constante en colonne (valeur de Y) et la valeur de B est constante en ligne (valeur de X).

Y\X	0	1
0	A=a1, B=b1	A=a2, B=b1
1	A=a1, B=b2	A=a2, B=b2

On aura donc $Z = 1$ si :

$a_1 + b_1 = 0$ et $P = 0$ (situation 1)
$a_2 + b_1 = 0$ et $P = 0$ (situation 2)
$a_1 + b_2 = 0$ et $P = 0$ (situation 3)
$a_2 + b_2 = 1$ et $P = 1$ (situation 4)

Mais $a_2 = 1 - a_1$ et $b_2 = 1 - b_1$. On aura donc $Z = 1$ si :

$a_1 + b_1 = 0$ et $P = 0$ (situation 1)
$a_1 - b_1 = 1$ et $P = 0$ (situation 2)
$b_1 - a_1 = 1$ et $P = 0$ (situation 3)
$a_1 + b_1 = 1$ et $P = 1$ (situation 4)

La condition $a_1 + b_1 = 0$ signifie simplement $a_1 = b_1$ (tous deux valent 0 ou tous deux valent 1). La condition $a_1 - b_1 = 1$ signifie simplement $a_1 \neq b_1$; de même pour $b_1 - a_1 = 1$ et pour $a_1 + b_1 = 1$. Nous avons donc finalement $Z = 1$ si :

$a_1 = b_1$ et $P = 0$ (situation 1)
$a_1 \neq b_1$ et $P = 0$ (situation 2)
$a_1 \neq b_1$ et $P = 0$ (situation 3)
$a_1 \neq b_1$ et $P = 1$ (situation 4)

Il faut donc choisir $a_1 \neq b_1$, compatible avec les situations 2, 3, 4 (un tel choix est donné au lemme 3). Il est impossible d'avoir les quatre situations, et donc la probabilité est $\leq \frac{3}{4}$. Ceci prouve la Proposition 4.

Cette proposition est utilisée par l'auteur pour montrer que si $P(Z=1) > \frac{3}{4}$, les variables X, Y sont nécessairement corrélées.

B. Cas des variables corrélées

Supposons que la loi conjointe de (X, Y) soit donnée par le tableau suivant :

Y\X	0	1
0	0.20	0.30
1	0.25	0.25

Les variables sont alors corrélées : la probabilité $P(X = 0\ et\ Y = 0) = 0.20$ tandis que $P(X=0)P(Y=0) = (0.20+0.25)(0.20+0.30) = 0.225.$

Reprenons le schéma du Lemme 3 : $A = X$, $B = 1 - Y$. On aura, avec $S = A + B$:

Y\X	0	1
0	$S=1, P=0$	$S=0, P=0$
1	$S=0, P=0$	$S=1, P=1$

Par conséquent, $S = P$ dans les situations 2, 3, 4, dont la probabilité totale est
$0.30 + 0.25 + 0.25 = 0.80 > \frac{3}{4}$

En pratique, on peut rendre la probabilité que $S = P$ arbitrairement proche de 1 : il suffit de diminuer la probabilité de la première situation, $X = 0\ et\ Y = 0,$ dans la table ci-dessus.

II. Corrélation entre photons

Le livre prend l'exemple d'un photon, dont l'énergie est très bien connue (peu d'incertitude), qui se décompose en deux photons, chacun ayant une énergie moins précisément connue. Ces deux photons "fils" seront alors "intriqués", selon la terminologie du livre, et cette intrication restera vraie, quelle que soit la distance entre les photons.

Mais ceci est une évidence si l'on admet une représentation probabiliste des particules.

Imaginons d'abord que le photon "mère" Ph_0 ait une énergie, notée e_0, parfaitement connue (ce n'est jamais le cas en pratique, mais l'incertitude peut être très faible). Ce photon "mère" donne naissance à deux photons "fils", notés ph_1, ph_2, dont l'énergie, pour des raisons physiques, n'est pas aussi bien connue. Ces deux photons fils sont identiques ; on s'attend donc à ce que l'énergie de chacun soit à peu près la moitié de l'énergie du photon "mère".

Imaginons ici que l'énergie de chaque photon fils ne puisse prendre que trois valeurs, $\frac{e_0}{2}, \frac{e_0}{2}+\varepsilon, \frac{e_0}{2}-\varepsilon$, avec probabilité $\frac{1}{3}$ pour chacun. A cause de la filiation, on se trouve nécessairement dans l'un des trois cas suivants (et ceux-là seulement) :

proba	énergie Ph1	énergie Ph2
1/3	$e_0 / 2$	$e_0 / 2$
1/3	$e_0 / 2+\varepsilon$	$e_0 / 2-\varepsilon$
1/3	$e_0 / 2-\varepsilon$	$e_0 / 2+\varepsilon$

Autrement dit, il est impossible que l'énergie de Ph_1 et celle de Ph_2 soient toutes deux égales à $\frac{e_0}{2}+\varepsilon$, puisqu'ils proviennent tous deux d'un même photon d'énergie égale à e_0.

Le raisonnement est absolument identique si l'énergie de Ph_0 ne prend plus une valeur précise, mais est donnée par une densité de probabilité, et aussi si les énergies de Ph_1, Ph_2 sont données par des densités de probabilité, et non pas seulement réduites à trois valeurs. Dans tous les cas, les photons Ph_1, Ph_2 sont nécessairement corrélés (au sens probabiliste du mot), et ce quelle que soit la distance qui les sépare, si les énergies de chacun ne sont pas modifiées.

En particulier, cette corrélation ne sera pas modifiée si les photons "fils" sont éloignés l'un de l'autre par fibre optique.

On obtient donc la conclusion suivante : si chaque particule, du point de vue de ses attributs (ici l'énergie, mais ce pourrait être la position, la vitesse, etc.) est représentée de manière probabiliste, la corrélation qui résulte d'une filiation est indépendante de la distance ("non locale", dit le livre).

Une représentation probabiliste d'une particule, par exemple du point de vue de la position, n'a aucun sens intuitif. Imaginons, par exemple, que la position puisse prendre trois valeurs comme ci-dessus, avec probabilité 1/3 pour chacune. Ce n'est pas une particule bien définie, mais ce n'est pas non plus une onde. Une onde signifie un continuum, avec une certaine proportion dans chaque situation. Ici, selon les cas, la particule se situe entièrement dans chaque position, avec une certaine probabilité. La génération à une densité de probabilité est assez simple : dans chaque intervalle défini par la densité, la particule se trouvera avec la probabilité correspondante (et elle s'y trouvera entièrement).

La question qui se pose dans ce contexte est celle de l'influence de la mesure. On admet en mécanique quantique que la mesure affecte l'observable, qui se retrouve alors dans un état bien défini. Dans l'exemple ci-dessus, avec trois valeurs seulement pour l'énergie, une mesure sur Ph_1 devrait donner $\frac{e_0}{2}$, ou $\frac{e_0}{2}-\varepsilon$, ou $\frac{e_0}{2}+\varepsilon$. Et, à ce moment-là, toute mesure faite sur Ph_2 donnera $\frac{e_0}{2}$, $\frac{e_0}{2}+\varepsilon$, $\frac{e_0}{2}-\varepsilon$. Ce n'est pas choquant en soi : la mesure ne fait que révéler le fait que Ph_1, Ph_2 sont corrélés : si l'un vaut $\frac{e_0}{2}+\varepsilon$, l'autre vaut $\frac{e_0}{2}-\varepsilon$. Ce n'est pas la mesure faite sur Ph_1 qui a obligé Ph_2 à changer d'état, contrairement à ce que dit le livre.