Exposé "Archimède", 08/07/2020

par Bernard Beauzamy

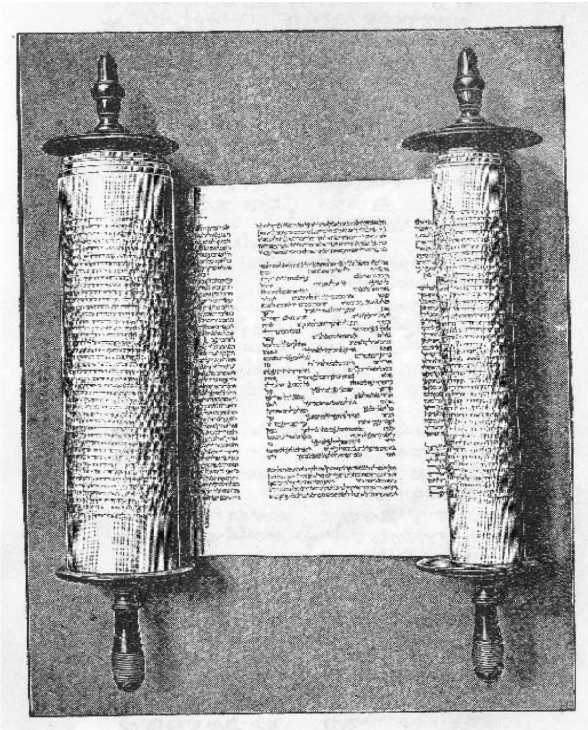
I. Historique

Les résultats que nous présentons sont extraits d'une lettre d'Archimède à son ami Dosithée ; la date précise est inconnue. Cette lettre contient un ensemble de résultats, regroupés sous le titre "De la sphère et du cylindre".

On le trouve sur Internet :

http://remacle.org/bloodwolf/erudits/archimede/table.htm

La lettre, à l'origine, était faite d'une feuille de papyrus :
"Le principe de fabrication du papier de papyrus réside dans la superposition de fines tranches de la tige de la plante, humidifiées, placées en couches et positionnées perpendiculairement les unes sur les autres et compressées. Normalement, seul un côté du papier était utilisé, sur lequel un traitement à base de colle était appliqué afin d'éviter que l'encre ne coule. Chaque morceau ne dépassait pas un demi-mètre de longueur, mais on pouvait assembler de nombreuses feuilles les unes aux autres, pour former de longs rouleaux" (Wikipedia).



On écrivait en colonnes étroites et on déroulait au fur et à mesure de la lecture ; ci-après, des rouleaux de la Torah (selon la tradition du judaïsme, l'enseignement divin transmis par Dieu à Moïse, environ 1500 ans av JC).

Archimède écrivait dans le dialecte dorique, assez proche du grec ancien. Les lettres étaient toutes en majuscules, sans espace ni ponctuation entre les mots.

La lettre était ensuite confiée à un bateau qui l'acheminait jusqu'à son destinataire ; la poste existait à cette époque. On ignore l'adresse de Dosithée.

Entre le 1er et le 4ème siècle après JC sont apparus des codex.

"*Le codex est un livre de forme parallélépipédique, résultat de l'assemblage de manuscrits en parchemin (peau d'animal). Sa caractéristique principale est la reliure des feuillets qui le constituent par la marge*" (Wikipedia).

Eutocius, né en Palestine en 480 après JC fait préparer une édition des œuvres complètes d'Archimède, avec ses commentaires.

Isidore de Milet, au 6ème siècle, est un architecte connu pour l'érection de la cathédrale Sainte Sophie à Constantinople ; il s'est inspiré des travaux d'Archimède pour les plans. Il a fait copier "De la sphère et du cylindre" par un étudiant.

Au 9ème siècle, les diverses lettres d'Archimède, réunies en trois codex, désignés par les lettres A, B et C, ont été recopiées en minuscules sur des parchemins de taille 30 cm x 19,5 cm. Le livre "De la sphère et du cylindre" fait partie du Codex A.

En 1265, traduction du grec en latin par Guillaume de Moerbeke, Frère Franciscain, en Italie.

En 1450, le codex A appartient au Pape Nicolas V, qui en fait faire une nouvelle traduction (du grec en latin) par Jacques de Crémone.

En 1492, Laurent de Médicis, dit Laurent le Magnifique, demande à Politien de retrouver le codex A. Il est retrouvé dans la bibliothèque de Giorgio Valla, et une copie en est faite.

En 1544, première édition des œuvres complètes d'Archimède à Bâle.

1564 : le codex A est perdu.

Le codex B est également perdu ; le codex C est le "palimpseste" d'Archimède, récemment retrouvé et restauré.

Nous avons travaillé sur l'édition Archimède, Œuvres, T. I : De la sphère et du cylindre. - La Mesure du cercle. - Sur les conoïdes et les sphéroïdes, Texte établi et traduit par Ch. Mugler. 2e tirage 2003, Edition "Les Belles Lettres". Texte en français et en grec.

PLUTARQUE

LES VIES DES HOMMES ILLUSTRES

TOME CINQUIÈME : VIE DE MARCELLUS

(vers 100 après JC)

XVII. […] Marcellus commença d'assiéger la ville de Syracuse par mer et par terre : Appius commandait l'armée de terre, et Marcellus, avec soixante galères à cinq rangs de rames, remplies de toutes sortes d'armes et de traits, outre une machine qu'il avait fait dresser sur huit galères liées ensemble, s'approcha des murailles, plein de confiance dans la force de ses batteries, dans la multitude de ses préparatifs, et plus encore dans sa propre réputation.

XVIII. Mais Archimède ne tenait pas grand compte de toutes ces machines, qui, en effet, n'étaient rien auprès des siennes : non qu'il les donnât pour des inventions d'un grand prix; il ne les regardait lui-même que comme de simples jeux de géométrie, qu'il n'avait faits que dans des moments de loisir, et la plupart sur les instances du roi Hiéron, qui ne cessait de l'engager à tourner son art, des choses purement intellectuelles, vers les objets sensibles, et de rendre ses raisonnements en quelque sorte accessibles aux sens et palpables au commun des hommes, en les appliquant par l'expérience à des choses d'usage. […]

XIX. Archimède avança un jour au roi Hiéron, dont il était le parent et l'ami, qu'avec une force donnée, on pouvait remuer un fardeau, de quelque poids qu'il fût. Plein de confiance en la force de sa démonstration, il se vanta que, s'il avait une autre terre, il remuerait à son gré celle-ci, en passant dans l'autre. Le roi, étonné de cette assertion, le pria de réduire en pratique son problème, et de lui faire voir une grande masse remuée par une petite force.

Archimède ayant fait tirer à terre, avec un grand travail, et à force de bras, une des galères du roi, ordonna qu'on y mît la charge ordinaire, avec autant d'hommes qu'elle en pourrait contenir; ensuite, s'étant assis à quelque distance, sans employer d'effort, en tirant doucement de la main le bout d'une machine à plusieurs poulies, il ramène à lui la galère, qui glissait aussi légèrement et avec aussi peu d'obstacle que si elle avait fendu les flots. Le roi, émerveillé d'un tel pouvoir de l'art, engagea Archimède à lui faire toutes sortes de machines et de batteries de siège, soit pour l'attaque, soit pour la défense des places. Mais il n'en fit point d'usage, car il passa presque tout son règne sans faire la guerre, et vécut dans une profonde paix. Tous ces préparatifs servirent alors aux Syracusains, à qui ils furent d'un grand secours, et qui, outre les machines, eurent l'artiste qui les avait faites.

XX. Les Romains donc ayant donné l'assaut de deux côtés différents, les Syracusains, consternés, restaient dans le silence, craignant de ne pouvoir résister à de si grands efforts, et à une puissance si redoutable. Mais quand Archimède eut mis ces machines en jeu, elles firent pleuvoir sur l'infanterie romaine une grêle de traits de toute espèce et des pierres d'une grosseur énorme, qui volaient avec tant de roideur et de fracas, que rien n'en pouvait soutenir le choc, et que, renversant tous ceux qui en étaient atteints, elles jetaient le désordre dans tous les rangs.

Du côté de la mer, il avait placé sur les murailles d'autres machines qui, abaissant tout à coup sur les galères de grosses antennes en forme de crocs, et cramponnant les vaisseaux, les enlevaient par la force du contrepoids, les laissaient retomber ensuite, et les abîmaient dans les flots ; il en accrochait d'autres par la proue avec des mains de fer ou des becs de grue, et, après les avoir dressées sur leur poupe, il les enfonçait dans la mer, ou les amenait vers la terre par le moyen de cordages qui tiraient les uns en sens contraire des autres ; là, après avoir pirouetté quelque temps, elles se brisaient contre les rochers qui s'avançaient de dessous les murailles, et la plupart de ceux qui les montaient périssaient misérablement. On voyait sans cesse des galères, enlevées et suspendues en l'air, tourner avec rapidité, et présenter un spectacle affreux : quand les hommes qui les montaient avaient été dispersés et jetés bien loin, comme des pierres lancées avec des frondes, elles se fracassaient contre les murailles ; ou les machines venant à lâcher prise, elles retombaient dans la mer. La machine que Marcellus faisait avancer sur huit galères liées ensemble était appelée sambyce, à cause de sa ressemblance avec l'instrument de musique de ce nom. Elle était encore assez loin des murailles, lorsque Archimède lança contre elle un rocher du poids de dix talents (600 livres) ; ensuite un second, puis, un troisième, qui, la frappant avec un sifflement et un fracas horribles, en détachèrent les appuis, et donnèrent aux vaisseaux de si violentes secousses, qu'ils se séparèrent les uns des autres. Marcellus, ne sachant plus que faire, se retira promptement avec ses galères, et envoya l'ordre aux troupes de terre de faire aussi leur retraite.

XXI. Il tint donc conseil, et il fut résolu que le lendemain, avant le jour, on s'approcherait, s'il était possible, des murailles, parce que les machines d'Archimède, ayant beaucoup de portée, lanceraient les traits par-dessus leurs têtes; et que celles qu'il pourrait employer de près seraient sans effet, le coup n'ayant point de force à si peu de distance. Mais Archimède avait, de longue main, préparé pour cela même des machines qui portaient à toutes les distances, et des traits plus courts qui se succédaient presque sans interruption. Il avait fait aux murailles des trous fort près les uns des autres, où il avait placé des scorpions d'une médiocre portée, que les ennemis ne pouvaient apercevoir, et qui faisaient de fréquentes blessures à ceux qui s'en approchaient.

Arrivés au pied des murailles, où ils se croyaient bien à couvert, ils furent encore assaillis d'une grêle de traits, ou accablés de pierres, qui tombaient à plomb sur leurs têtes; il n'y avait pas un endroit de la muraille d'où l'on ne tirât sur eux. Ils prirent donc le parti de reculer; mais ils s'étaient à peine éloignés, qu'Archimède fit pleuvoir sur eux, dans leur retraite, une si grande quantité de traits, qu'il leur tua beaucoup de monde et fracassa un grand nombre de leurs vaisseaux, sans qu'ils pussent eux-mêmes faire aucun mal aux ennemis, car Archimède avait dressé la plupart de ses machines à couvert derrière les murailles, et les Romains, accablés de toutes parts, sans voir d'où les coups partaient, semblaient combattre contre les dieux.

Cependant Marcellus, échappé de ce danger, se mit à railler les ingénieurs et les ouvriers qu'il avait dans son camp, de ce qu'Archimède en se jouant plongeait ses vaisseaux dans la mer, comme des coupes à puiser de l'eau, et outrageait honteusement sa sambyce.
Il est vrai que les Syracusains n'étaient que comme le corps de ces machines d'Archimède, et que seul il était l'âme qui faisait tout mouvoir et agir. Tous les autres moyens de défense étaient suspendus; la ville ne se servait que de ceux d'Archimède, soit pour l'attaque, soit pour la défense.

Enfin, Marcellus voyant les Romains si effrayés, qu'à la vue seule d'une corde ou d'un pieu de bois qui paraissait sur la muraille, ils tournaient le dos et prenaient la fuite, en criant que c'était quelque nouvelle machine qu'Archimède allait lancer contre eux, cessa toutes les attaques, et changea le siège en blocus.

XXII. Au reste, Archimède avait une âme si élevée, un esprit si profond et une si grande richesse de théories géométriques, qu'il ne voulut jamais rien laisser par écrit sur la construction de ces machines qui lui avaient acquis tant de gloire, et lui avaient fait attribuer, non une science humaine, mais une intelligence divine; regardant la mécanique, et en général tout art qu'on exerce pour le besoin, comme des arts vils et obscurs, il ne se livra qu'aux sciences dont la beauté et la perfection ne sont liées à aucune nécessité, et avec lesquelles toutes les autres ne sauraient entrer en comparaison : dans les premières, la démonstration dispute de prix avec le sujet : l'un donne la grandeur et la beauté, l'autre opère la conviction et donne une force merveilleuse.

Dans toute la géométrie, on ne trouverait pas des questions plus difficiles et plus profondes exposées en des termes plus simples, et par des principes plus clairs que celles qu'Archimède a traitées. Les uns attribuent cette clarté à sa facilité naturelle; d'autres, à l'excès du travail, qui donne un air si facile à ce qui a le plus coûté.

On pourrait bien ne pas découvrir de soi-même la démonstration de certains problèmes; mais, après l'avoir lue dans ses écrits, on se persuade qu'on l'aurait trouvée sans peine : tant le chemin par lequel il mène à la démonstration est facile et court !

Il ne faut donc pas refuser de croire ce qu'on dit de lui : que, sans cesse attiré par la géométrie comme par une sirène domestique, il oubliait de boire et de manger, et négligeait tous les soins de son corps; traîné souvent par force aux bains et aux étuves, il traçait sur les cendres du foyer des figures géométriques, et sur son corps frotté d'huile il tirait des lignes avec le doigt : tant cette étude le ravissait ! tant il était réellement possédé de la passion des Muses !

Mais, quoiqu'il eût fait plusieurs inventions très belles, il pria, dit-on ses parents et ses amis de ne mettre, après sa mort, sur son tombeau, qu'une sphère inscrite dans un cylindre, et de marquer, dans l'inscription, de quelle quantité, dans ces deux solides, le contenant surpasse le contenu.

(tombe retrouvée par Cicéron, lorsqu'il était questeur en Sicile, vers 75 av JC ; cette tombe est maintenant perdue)

Ce fut par ces connaissances profondes en mécanique qu'Archimède se conserva invincible, lui et sa ville, autant qu'il dépendit de lui.

XXIII. Pendant que Syracuse restait bloquée, Marcellus alla s'emparer de Mégare, une des plus anciennes villes de la Sicile; il prit ensuite le camp d'Hippocrate près d'Acriles, et étant tombé sur ses troupes pendant qu'elles travaillaient à se retrancher, il tua plus de huit mille hommes. Il parcourut une partie de la Sicile, reprit plusieurs villes sur les Carthaginois, et défit en divers combats tous ceux qui osèrent se mesurer avec lui. Quelque temps après, il fit prisonnier, devant Syracuse, un Spartiate nommé Damippus, qui sortait par mer de cette ville. Les Syracusains, qui désiraient fort le racheter, en firent la proposition à Marcellus. Il y eut à cette occasion plusieurs entrevues et plusieurs conférences, pendant lesquelles Marcellus observa qu'une des tours était fort négligemment gardée, et qu'on pourrait y faire entrer secrètement quelques soldats, parce que la muraille de la ville était en cet endroit facile à escalader. Les rendez-vous fréquents qui eurent lieu près de cette tour l'ayant mis à portée d'en juger la hauteur par estimation, il fit préparer des échelles; et, profitant d'une fête de Diane que les Syracusains célébraient au milieu des festins et des plaisirs, dès le matin il se saisit de la tour sans être aperçu, remplit d'hommes armés les murs des environs, et rompit une des portes de l'Hexapyle.

Les Syracusains, réveillés par le bruit, commençaient à se mettre en mouvement avec beaucoup de trouble, lorsque Marcellus fit sonner à la fois toutes les trompettes : ce qui jeta une telle frayeur parmi les habitants, qu'ils prirent tous la fuite, persuadés qu'il n'y avait pas un quartier de la ville qui ne fût au pouvoir de l'ennemi. Mais il leur restait encore l'Achradine, qui en était la plus grande, la plus forte et la plus belle portion : Marcellus n'avait pu s'en rendre maître, parce que ses murailles sont séparées du reste de la ville, qui est divisée en deux parties, dont l'une s'appelle la Ville-Neuve, et l'autre Tyché.

XXIV. [...]

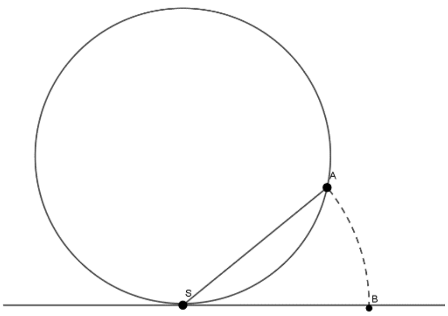
XXV. Mais rien n'affligea tant Marcellus que la mort d'Archimède. Ce philosophe était alors chez lui, appliqué à quelque figure de géométrie; et comme il donnait à cette méditation tout son esprit et tous ses sens, il n'avait pas entendu le bruit des Romains qui couraient de toutes parts dans la ville, et il ignorait qu'elle fût en leur pouvoir. Tout à coup il se présente à lui un soldat qui lui ordonne de le suivre pour aller trouver Marcellus. Il refuse d'y aller jusqu'à ce qu'il ait achevé la démonstration de son problème. Le Romain, irrité, tire son épée et le tue. D'autres disent qu'un soldat étant allé d'abord à lui, l'épée à la main, pour le tuer, Archimède le pria instamment d'attendre un moment, afin qu'il ne laissât pas son problème imparfait; et que le soldat, qui se souciait fort peu de sa démonstration, le perça de son épée.

[...] Mais ce qui est avoué de tous les historiens, c'est que Marcellus fut très affligé de sa mort, qu'il eut horreur du meurtrier comme d'un sacrilège, et qu'ayant fait chercher les parents d'Archimède, il les traita de la manière la plus honorable.

II. Eléments mathématiques

Nous retraçons la progression logique suivie par Archimède, avec un vocabulaire plus moderne.

Théorème (Archimède). - **Projection de la sphère sur le plan, préservant la mesure.**



Une sphère de rayon R repose sur un plan ; soit S (pôle Sud) le point de contact. L'application $A \to B$ définie par : la longueur du segment SA est égale à la longueur du segment SB et S, A, B sont dans le plan vertical contenant le centre de la sphère, est une isométrie de la sphère sauf le pôle Nord sur le disque de centre S et de rayon $2R$.

En d'autres termes, cette application préserve la mesure : un ensemble sur la sphère sera transformé en un ensemble de même mesure sur le plan.

En particulier, deux ensembles de même mesure sur la sphère sont transformés en deux ensembles de même mesure dans le plan.

De nos jours, cette projection s'appelle "projection azimutale de Lambert". Wikipedia : http://en.wikipedia.org/wiki/Lambert_azimuthal_equal-area_projection :

To define the Lambert azimuthal projection, imagine a plane set tangent to the sphere at some point S on the sphere. Let P be any point on the sphere other than the antipode of S. Let d be the distance between S and P in three-dimensional space (not the distance along the sphere surface). Then the projection sends P to a point P' on the plane that is a distance d from S.

Lambert (1772) ne mentionne pas Archimède et il a fallu attendre 2010 pour que le lien soit fait entre les deux, par François Guénard, Université de Paris-Sud Orsay, en suite à l'exposé que j'avais fait sur les travaux d'Archimède.

Voici la carte de l'hémisphère nord, obtenue par la transformation d'Archimède (travail réalisé par François Guénard, Université de Paris-Sud Orsay, en utilisant Mathematica) :

Corollaire. – La surface de la sphère est égale à 4 fois la surface d'un grand cercle.

Démonstration du Corollaire

Mettons le point A très proche du pôle Nord. Le transformé B est à distance proche de $2R$ du point S. La sphère tout entière se transforme donc isométriquement (donc en gardant la même aire) en un cercle de rayon $2R$. On sait que la surface d'un cercle est proportionnelle au carré du rayon : la surface de la sphère est donc égale à 4 fois la surface du cercle de rayon R.

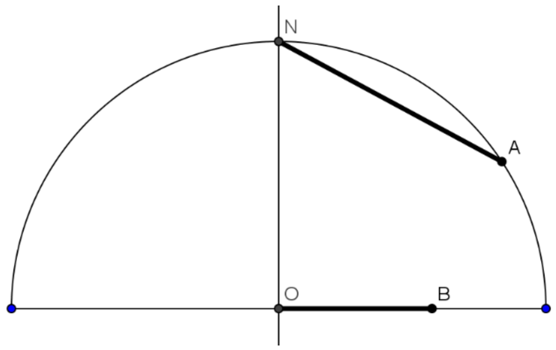
Théorème 2 (Archimède). Enoncé équivalent au précédent

On considère une demi-sphère et le disque associé. Soit l'application $f: A \to B$ *définie par le fait que* B *est dans le même plan vertical que* A *(plan* NOA*) et par le fait que* $OB = \frac{1}{\sqrt{2}} NA$*, alors :*

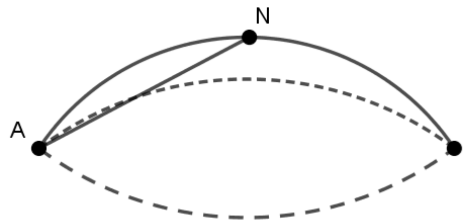
– f *est une bijection de la demi-sphère sur le disque*

– *cette bijection respecte la mesure sur la demi-sphère : pour tout ensemble* E *contenu dans la demi-sphère,* $m(f(E))$ *ne dépend que de la mesure* $m(E)$ *et non de la position de* E*.*

Le lien entre le théorème 1 et le théorème 2 est évident : si on a une isométrie de la sphère (sauf le pôle Nord) sur le disque de rayon $2R$ tangent en S, on en déduit une isométrie sur le disque équatorial, en divisant par $\sqrt{2}$.



Théorème 3 (Archimède). – *Soit une calotte sphérique de sommet N et soit A un point quelconque de la périphérie de la calotte. Alors l'aire de la calotte est égale à l'aire du cercle de rayon NA.*



A priori, le Théorème 3 est plus faible que le Théorème 1, puisque le Th. 3 identifie simplement l'aire de la calotte avec l'aire d'un cercle, alors que le Théorème 1 est beaucoup plus général : il dit que la transformation est une isométrie.

Admettons le Théorème 3 et voyons comment il implique le Théorème 1, à savoir que l'application f définie plus haut préserve la mesure.

Soient A_1 et A_2 deux points sur la sphère. La calotte SA_1 a pour aire $\pi(SA_1)^2$ (Th. 3) et la calotte SA_2 a pour aire $\pi(SA_2)^2$. Les images sont respectivement les disques de rayon OB_1 et OB_2, d'aires respectifs $\pi(OB_1)^2 = \frac{\pi}{2}(SA_1)^2$ et $\frac{\pi}{2}(SA_2)^2$. L'aire de la couronne entre les deux disques est donc :

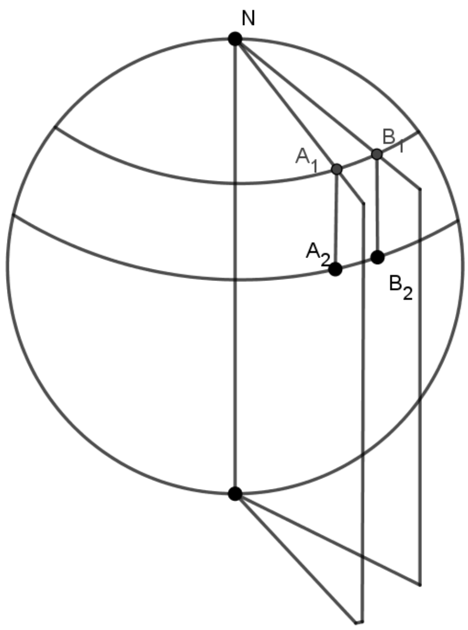
$$\frac{\pi}{2}(SA_2)^2 - \frac{\pi}{2}(SA_1)^2 = \frac{1}{2}\left(aire(calotte\ SA_1) - aire(calotte\ SA_2)\right)$$

et ce, où que soient les points A_1 et A_2 .

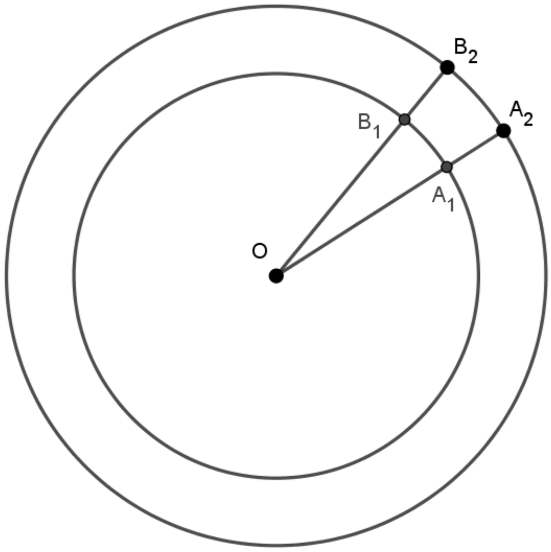
Par conséquent, l'application f :

– transforme une calotte en un disque de même aire ;
– transforme la différence de deux calottes en un anneau de même aire ;

et si on prend l'intersection par deux plans verticaux, tous deux contenant l'axe Nord-Sud de la sphère, transforme un "rectangle" sur la calotte en un "rectangle" entre deux cercles, de même aire.



Le "rectangle" $A_1A_2B_1B_2$ sur la sphère est transformé en un "rectangle" entre deux cercles :



et ce second rectangle a même aire que le premier. Il en résulte que l'application f conserve la mesure, parce que tout ensemble mesurable de la sphère est engendré par une réunion dénombrable de tels "rectangles" (ils constituent la "tribu borélienne" sur la sphère).

Ceci achève la démonstration de l'implication Th 3 $\Rightarrow$ Th 1.

Remarque.

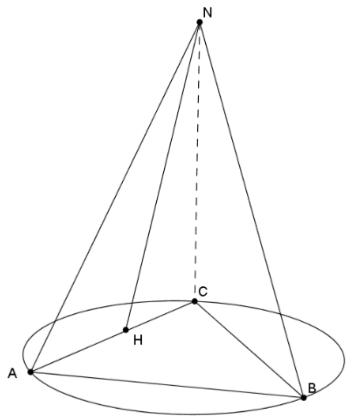
La formule habituellement donnée pour calculer l'aire d'une calotte sphérique dépend de deux paramètres $A = 2\pi Rh$, où R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte, tandis que la formule d'Archimède n'utilise qu'un seul paramètre : la distance entre le centre de la calotte et son bord. Il est facile de vérifier que les deux formules sont équivalentes.

Par conséquent, si nous voulons une représentation plane des territoires sur une sphère, qui respecte l'importance relative de ces territoires, il faut utiliser la transformation $f : A \to B$ ci-dessus et non la projection de Mercator.

La projection usuelle de la demi-sphère sur le disque (projection verticale) n'a pas de propriété d'invariance pour la mesure euclidienne usuelle : un ensemble situé à proximité du haut se projette bien, un ensemble situé à proximité des bords est écrasé.
Démonstration du Théorème 3.

Nous aurons besoin de Lemmes

Lemme A. – *Soit CR un cône de révolution de sommet N ; on inscrit dans sa base un triangle équilatéral ABC et on construit la pyramide P de sommet N et de base ABC. L'aire de la pyramide P (sans la base) est égale à l'aire d'un triangle ayant pour base le périmètre du triangle ABC et pour hauteur NH, où H est la projection de N sur l'un quelconque des côtés du triangle ABC. Ou encore :*

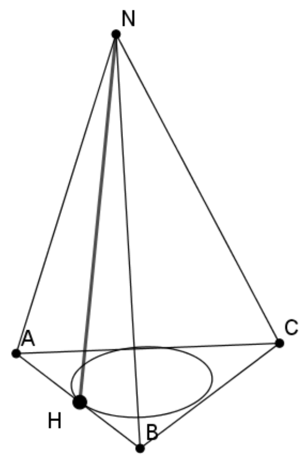


$$aire(Pyramide) = \frac{NH}{2} \, périmètre(ABC)$$

Démonstration du lemme A

L'aire de la pyramide sans la base est la somme des aires des trois trianges NAB, NAC, NBC. Ces triangles sont égaux et isocèles ; ils ont pour hauteur NH et pour base respectives AB, BC, CA. L'aire du premier est donc $\frac{1}{2} NH \times AB$ et de même pour les deux autres ; ceci prouve le lemme A.

Lemme B. – *Soit* CR *un cône de révolution de sommet* N *et une pyramide, dont la base est faite d'un triangle équilatéral ABC, circonscrite à ce cône. Alors l'aire de la pyramide est égale à l'aire d'un triangle dont la base a pour longueur le périmètre de ce triangle, et pour hauteur la génératrice du cône. Ou encore :*



$$aire(Pyramide) = \frac{l}{2}\, périmètre(ABC)$$

où l est la longueur de la génératrice du cône.

Démonstration du lemme B

L'aire de la pyramide est la somme des aires des trois triangles NAB, NBC, NCA. Le triangle NAB a pour aire :

$$aire(NAB) = \frac{l}{2} AB$$

et de même pour les autres triangles ; ceci prouve le lemme B.

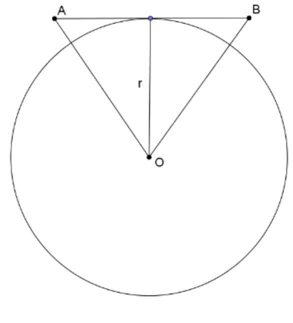
Lemme C. – *Soit* CR *un cône de révolution, de génératrice de longueur* l, *appuyé sur un cercle de rayon* r. *Ce cône a même aire qu'un cercle* C_ρ *avec :*

$$\rho = \sqrt{lr}$$

en d'autres termes, la surface du cône est πlr.

Démonstration du lemme C

Il suffit de montrer cette propriété pour un polygone circonscrit au cercle, en remplaçant le cône par la pyramide associée. Soit P_r un polygone circonscrit au cercle de rayon r et soit L le périmètre de ce polygone. L'aire du polygone est la somme des aires des triangles constitutifs, soit $aire = \frac{1}{2} r \sum_n A_n B_n = \frac{Lr}{2}$.



L'aire du cône appuyé sur le polygone est $\frac{l\,L}{2}$ d'après le lemme B.

Soit P_ρ un polygone semblable au premier, circonscrit au cercle de rayon ρ. Son périmètre sera donc $L\dfrac{\rho}{r}$ et son aire se déduit de celle de P_r dans le rapport $\left(\dfrac{\rho}{r}\right)^2$; elle vaut donc :

$$aire\left(P_\rho\right)=\frac{Lr}{2}\left(\frac{\rho}{r}\right)^2=\frac{L\rho^2}{2r}$$

Mais d'après le choix de ρ, $aire\left(P_\rho\right)=\dfrac{Ll}{r}$.

On constate que le cône appuyé sur le polygone P_r et le polygone P_ρ ont même aire ; le résultat s'en déduit par passage à la limite.

Lemme D. – *Soit CR un cône de révolution, de génératrice de longueur l, appuyé sur un cercle C_r de rayon r. Alors :*

$$\frac{aire\left(Cône\right)}{aire\left(C_r\right)}=\frac{l}{r}$$

Démonstration du lemme D

On sait d'après le lemme C que le cône a même aire que le cercle C_ρ avec $\rho=\sqrt{lr}$. Or :

$$\frac{aire\left(C_\rho\right)}{aire\left(C_r\right)}=\frac{\rho^2}{r^2}=\frac{l}{r}$$

On sait en effet que l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré du rayon. Ceci prouve le lemme D.

Lemme E. – *Soit un cylindre droit, de hauteur h et de rayon r. Ce cylindre (sans les disques extrémités) a la même surface qu'un cercle C_ρ de rayon $\rho=\sqrt{2rh}$*

Démonstration du lemme E

Circonscrivons au cercle C_r un polygone régulier P_r ; soit P_ρ le polygone régulier semblable, circonscrit au le cercle C_ρ. Si le polygone P_r a pour périmètre l, le polygone P_ρ aura pour périmètre $\dfrac{l\rho}{r}$, puisqu'ils sont semblables. L'aire de P_r est : $aire\left(P_r\right)=\dfrac{lr}{2}$,

et de même $aire\left(P_\rho\right)=\dfrac{l\rho^2}{2r}=lh.$

L'aire du prisme circonscrit au cylindre CYL, construit sur P_r est également $a=lh.$

On a donc, d'après le choix de ρ, égalité entre l'aire de P_ρ et l'aire du prisme circonscrit au cylindre :

$$aire(P_\rho) = aire(PRISME) \tag{1}$$

En faisant tendre le polygone circonscrit vers le cercle, le prisme tend vers le cylindre et le lemme en résulte.

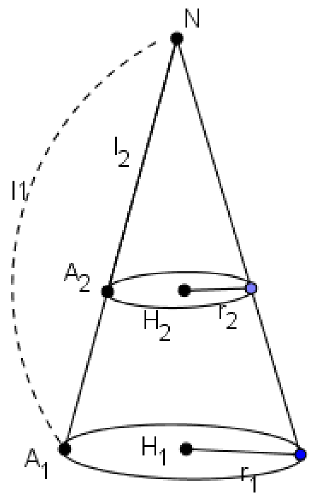
Lemme F. – *Soit CR un cône de révolution, coupé par deux plans perpendiculaires à l'axe ; soient r_1 et r_2 les rayons respectifs des cercles correspondants ; soient l_1 et l_2 les longueurs des portions de génératrice. L'aire du tronc de cône situé entre les deux plans est égale à l'aire d'un cercle de rayon :*

$$\rho = \sqrt{(l_1 - l_2)(r_1 + r_2)}$$

ou, avec une formule,

$$aire(tronc\_cône) = \pi(l_1 - l_2)(r_1 + r_2)$$

Démonstration du lemme F



Nous allons montrer que :

$$NA_1 \times A_1H_1 = NA_2 \times A_2H_2 + A_1A_2\left(A_1H_1 + A_2H_2\right) \tag{1}$$

ou encore :

$$l_1r_1 = l_2r_2 + (l_1 - l_2)(r_1 + r_2) \tag{2}$$

Ceci équivaut à :

$$NA_1 \times A_1H_1 = NA_2 \times A_2H_2 + A_1A_2 \times A_1H_1 + A_1A_2 \times A_2H_2$$

ou encore, puisque $NA_1 = NA_2 + A_1A_2$

$$NA_2 \times A_1H_1 = NA_2 \times A_2H_2 + A_1A_2 \times A_2H_2$$

Ce qui s'écrit encore :

$$NA_2 \times A_1H_1 = NA_1 \times A_2H_2$$

qui est équivalent à :

$$\frac{NA_2}{NA_1} = \frac{A_2H_2}{A_1H_1}$$

propriété qui est bien vérifiée ; ceci établit (1).

D'après le lemme 13, le cône de génératrice l_1 a la même aire que le cercle C_1 de rayon $\rho_1 = \sqrt{r_1 l_1}$ et de même pour le cône de génératrice l_2

Or l'aire d'un cercle est proportionnelle au carré du rayon ; notons π le coefficient de proportionnalité. Le terme $\pi l_1 r_1$ est donc l'aire du cône de génératrice l_1 et le terme $\pi l_2 r_2$ est l'aire du cône de génératrice l_2 .

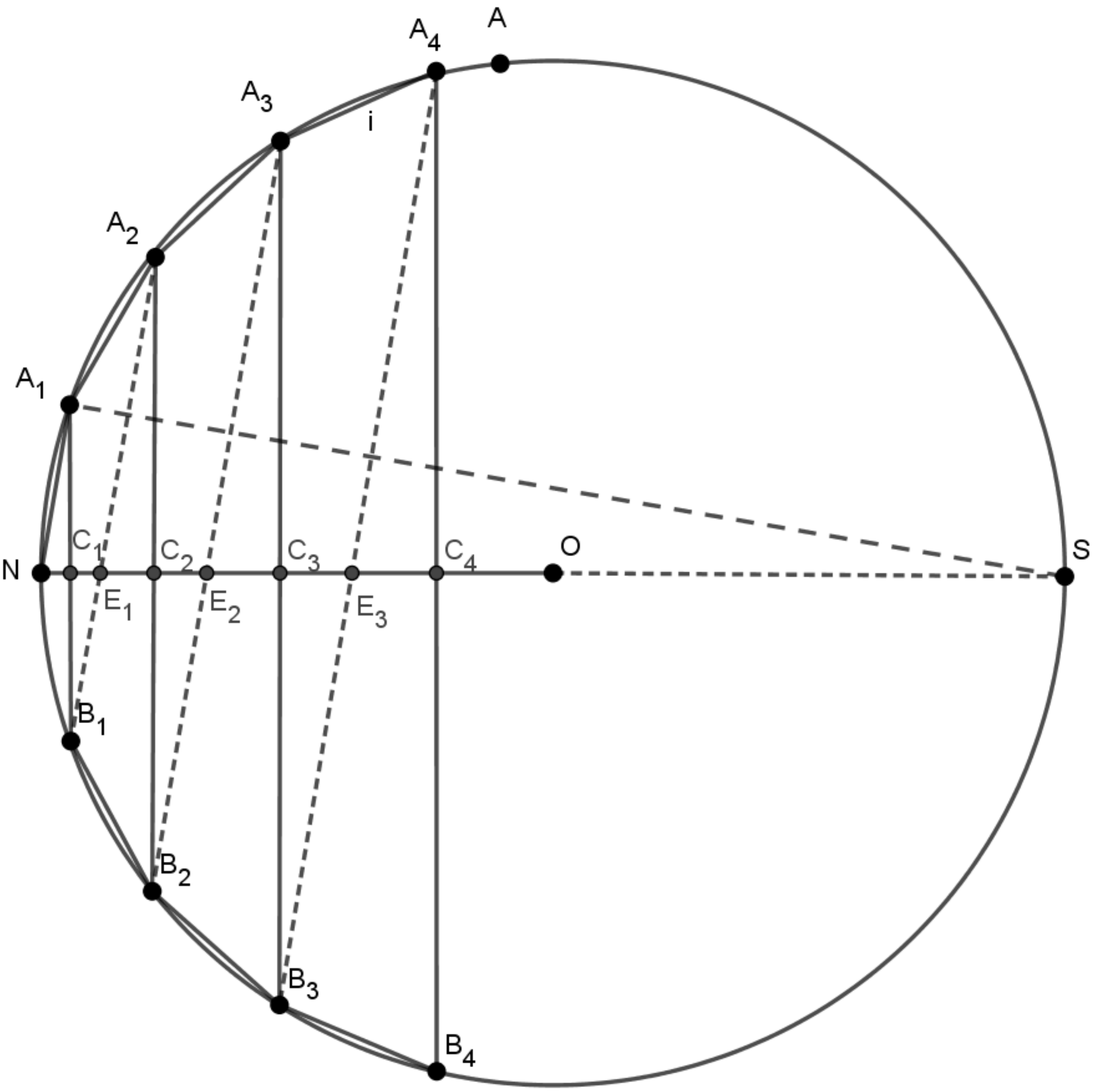
L'aire du tronc de cône est donc $\pi l_1 r_1 - \pi l_2 r_2 = \pi\left(l_1 - l_2\right)\left(r_1 + r_2\right)$ d'après (2)

Cette aire est celle d'un cercle de rayon :

$$\rho = \sqrt{\left(l_1 - l_2\right)\left(r_1 + r_2\right)}$$

ce qui prouve le Lemme F.

Nous allons maintenant démontrer le Théorème 3. Par commodité, nous faisons pivoter le dessin : le pôle Nord est à gauche.



Les cordes $A_1B_1,\ A_2B_2,....$ etc. sont parallèles entre elles, mais aussi les cordes $NA_1,\ B_1A_2, B_2A_3,...$ etc.

Les triangles NA_1C_1 et $E_1B_1C_1$ sont donc semblables. Il en résulte que $\frac{A_1C_1}{NC_1} = \frac{B_1C_1}{C_1E_1}$.

Mais les triangles $E_1B_1C_1$ et $E_1A_2C_2$ sont aussi semblables ; il en résulte que $\frac{B_1C_1}{C_1E_1} = \frac{A_2C_2}{C_2E_1}$

Nous obtenons donc $\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{C_1B_1}{C_1E_1} = \frac{A_2C_2}{C_2E_1}$

et de même :

$$\frac{A_2C_2}{C_2E_1} = \frac{C_2B_2}{C_2E_2} = \frac{A_3C_3}{E_2C_3} = \frac{C_3B_3}{C_3E_3} = \frac{A_4C_4}{E_3C_4} = \frac{C_4B_4}{C_4E_4}$$

$$\frac{A_1C_1}{NC_1} = \frac{C_1B_1}{C_1E_1} = \frac{A_2C_2}{C_2E_1} = \frac{C_2B_2}{C_2E_2} = \frac{A_3C_3}{E_2C_3} = \frac{C_3B_3}{C_3E_3} = \frac{A_4C_4}{E_3C_4} = \frac{C_4B_4}{C_4E_4}$$

$$= \frac{A_1C_1 + C_1B_1 + A_2C_2 + C_2B_2 + A_3C_3 + C_3B_3 + A_4C_4 + C_4B_4}{NC_1 + C_1E_1 + E_1C_2 + C_2E_2 + E_2C_3 + C_3E_3 + E_3C_4 + C_4E_4}$$

$$= \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4}{AE_4}$$

Mais les triangles NA_1C_1 et NA_1S sont aussi semblables (triangles rectangles ayant un angle commun) ; il en résulte que :

$$\frac{A_1C_1}{NC_1} = \frac{SA_1}{NA_1}$$

D'où :

$$\frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4}{NE_4} = \frac{SA_1}{NA_1}$$

et donc :

$$NA_1\left(A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 + A_4B_4\right) = SA_1 \times AE_4 \,. \tag{3}$$

Nous faisons maintenant tourner la figure 8 autour de l'axe Nord-Sud.
Les segments NA_1, NB_1, en tournant, engendrent un cône.
Les segments A_1A_2 et B_1B_2, en tournant, engendrent un tronc de cône, et de même pour les autres segments.

D'après le lemme F :

$$\pi NA_1 \times \frac{A_1B_1}{2} = aire\left(première\_calotte\right)$$

$$\pi NA_1\left(\frac{A_1B_1 + A_2B_2}{2}\right) = aire\left(\text{seconde}\_calotte\right)$$

$$\pi NA_1\left(\frac{A_2B_2 + A_3B_3}{2}\right) = aire\left(\text{troisième}\_calotte\right)$$

$$\pi NA_1\left(\frac{A_3B_3 + A_4B_4}{2}\right) = aire\left(\text{quatrième}\_calotte\right)$$

En sommant (il manque un demi du dernier terme) :

$$aire(calotte\_sphérique) \approx \pi NA_1 \sum A_n B_n$$

et en utilisant (3) :

$$aire(calotte\_sphérique) \approx \pi\, SA_1 \times AE_n$$

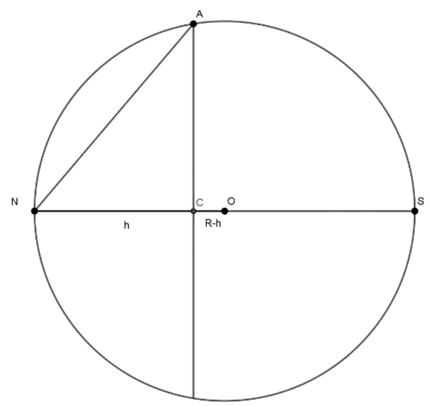
Il faut montrer que ceci coïncide avec l'aire du cercle de rayon NA_n ou encore :

$$SA_1 \times AE_n = NA_n^2 \ (4)$$

Or lorsque le nombre de découpages tend vers l'infini :

$A_1 \approx N$, $E_n \approx C_n$ noté C et (4) s'écrit :

$$SN \times AC = NA^2$$



On veut montrer que

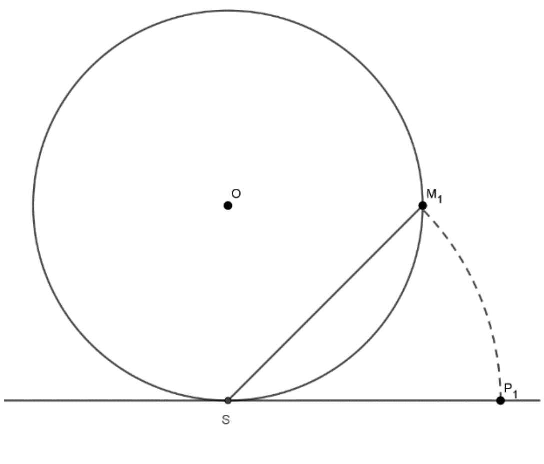
$$2Rh = NA^2$$

où R est le rayon du cercle, $h = NC$ est la hauteur de la coupelle.

Or $NA^2 = NC^2 + CA^2$, $NC^2 = h^2$, $CA^2 = R^2 - (R-h)^2$.

D'où $NA^2 = 2Rh$ comme annoncé. Ceci démontre le Théorème 3.

Remarque importante : choix de la dimension

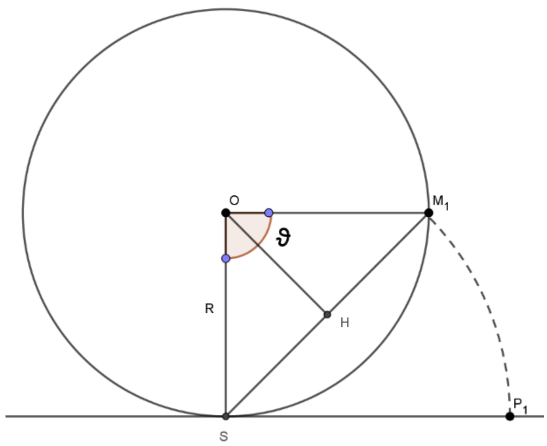


Le Théorème 3 porte sur la comparaison entre une sphère et un cercle : passage de la dimension 3 en dimension 2. L'énoncé correspondant (passage de la dimension 2 à la dimension 1) est faux.

L'énoncé correspondant serait : projection du cercle sur la droite, avec $SP_1 = SM_1$.

Or cette projection ne conserve pas les longueurs. En effet, on a $SP_1 = SM_1 = 2R\sin\frac{\vartheta}{2}$

Prenons le point M_1 correspondant à l'angle $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (figure ci-dessus) et le point M_2 correspondant à l'angle $\frac{\pi}{4}$. Sur le cercle, les arcs SM_2 et M_2M_1 sont égaux, puisque les angles au centre sont les mêmes. Mais les projections auront pour longueur :



$$SP_2 = SM_2 = 2R\sin\frac{\pi}{8} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$$

tandis que $SP_1 = 2R\sin\frac{\pi}{4} = R\sqrt{2}$ n'est pas le double du précédent.

Le théorème n'est pas vrai non plus en dimension supérieure. En effet, soit S_n la sphère unité, frontière de la boule B_{n+1} dans $\mathbb{R}^{n+1}$; l'aire de S_n est proportionnelle à R^n ; notons $aire(S_n) = s_n R^n$. Pour la boule tout entière, le segment $SA = SN$ a pour longueur 2. La transformée isométrique en dimension n devra avoir pour volume $s_n R^n$.

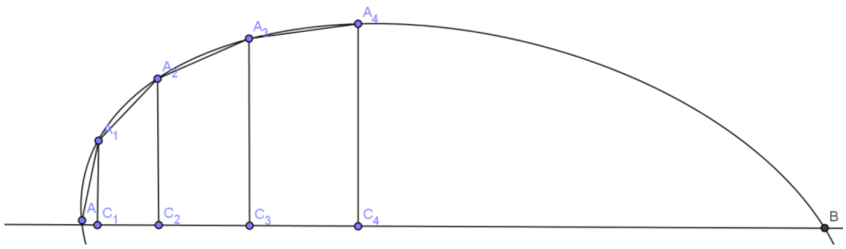
Considérons maintenant la demi-boule inférieure : son volume est la moitié du précédent et l'aire de la calotte sphérique est aussi la moitié, soit $aire(calotte) = \frac{1}{2} s_n R^n$ et ceci sera le volume de la projection sur $\mathbb{R}^n$.

Mais dans le cas de la demi-boule inférieure, le segment SA a pour longueur $\sqrt{2}$, et le volume de la projection sera $s_n \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}R\right)^n$, ce qui ne coïncide pas avec le précédent, sauf si $n = 2$.

Le Théorème d'Archimède est donc très lié à une dimension particulière.

Généralisation

Au lieu d'un cercle, considérons une courbe quelconque $y = f(x)$, prenant la valeur 0 en $x = A$ et $x = B$.



Reportons, comme fait Archimède, un segment de longueur constante l et construisons ainsi les points $A_1, A_2, \ldots$ sur la courbe ; abaissons-les perpendiculairement sur l'axe AB ; nous obtenons ainsi les points $C_1, C_2, \ldots$, dont les abscisses seront notées $c_1, c_2, \ldots$, l'axe AB étant pris pour axe des abscisses.

Faisons tourner la courbe autour de l'axe AB ; le produit $A_nC_n \times A_nA_{n+1} = l\ A_nC_n$ représente, à 2π près, l'aire du tronc de cône généré par la rotation du segment A_nA_{n+1}. La somme $l\sum_n A_nA_{n+1}$ tend donc, lorsque $l \to 0$, vers l'aire de la surface de révolution engendrée par la courbe $y = f(x)$ dans sa rotation autour de l'axe AB.

Mais on a aussi, pour tout n, $l = \sqrt{\left(f(c_{n+1}) - f(c_n)\right)^2 + (c_{n+1} - c_n)^2}$

et puisque $f'(c_n) \simeq \dfrac{f(c_{n+1}) - f(c_n)}{c_{n+1} - c_n}$, on en déduit $l \approx \left(c_{n+1} - c_n\right)\sqrt{1 + f'(c_n)^2}$, et donc :

$$l\sum_n f(c_n) \approx \sum_n \left(c_{n+1} - c_n\right)\sqrt{1 + f'(c_n)^2}\, f(c_n)$$

Faisant tendre l vers 0, on obtient la formule $\textit{aire surface révolution} = 2\pi \int_a^b f(t)\sqrt{1 + f'(t)^2}\,dt$,

formule bien connue, (cf. p. ex. http://mathworld.wolfram.com/SurfaceofRevolution.html), les auteurs ayant simplement oublié d'indiquer qu'elle vient d'Archimède, en suivant exactement sa démonstration.

Applications

Cartes d'Archimède : découpage d'une région en sous-régions d'égale population, ou ayant toutes la même consommation électrique, ou bien le même nombre de télétravailleurs, etc. : préoccupations d'aménagement du territoire.

Transformation d'Archimède : une application bijective qui préserve la mesure. Dans le plan, il existe toujours une transformation d'Archimède entre un compact convexe quelconque et un disque ou un carré.

Application : mettre des points tirés au hasard, selon une loi uniforme, dans un convexe compact quelconque.

Autre application : définition d'un réseau de surveillance de zones, par exemple dans le domaine de l'environnement.