Détermination du centre de gravité du demi-cercle par la méthode d'Archimède (méthode des pesées)

Bernard Beauzamy
11/07/2023

Ceci est un extrait de notre projet "Archimède, œuvres choisies, édition revue et corrigée, placée sous le haut parrainage de Lorenzo de Médicis, dit Laurent le Magnifique" ; voir :
http://www.scmsa.eu/archives/Archimede_LorenzoLM.pdf
pour une description complète du projet.

Rappelons que le cercle de centre O et de rayon R est constitué des points qui sont exactement à distance R de $O,$ tandis que le disque est constitué des points qui sont à distance au plus R de O :

$$C(O,R)=\{A; d(O,A)=R\}, D(O,R)=\{A; d(O,A)\leq R\}.$$

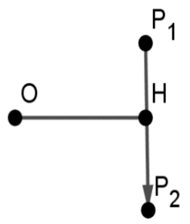
Le cercle est la frontière du disque. On parle de longueur pour le cercle, d'aire (ou surface) pour le disque.

La longueur du demi-cercle est évidemment $\pi R.$ Pour le centre de gravité, les choses sont nettement moins simples. Il est évident que le centre de gravité se situe sur l'axe de symétrie du demi-cercle. Nous allons en déterminer la position en utilisant la "méthode de pesée", due à Archimède.

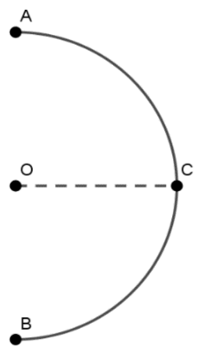
Le calcul est possible par les méthodes traditionnellement enseignées : il faut paramétrer la courbe en coordonnées polaires, exprimer l'élément de longueur et calculer l'intégrale correspondante. La compréhension même de la méthode n'est pas évidente et les calculs ne sont pas à la portée d'un lycéen.

La méthode d'Archimède, au contraire, est simple, intuitive, et parfaitement à la portée d'un lycéen.

Proposition. – *Le centre de gravité G est situé, sur l'axe de symétrie, à distance $\frac{2R}{\pi}$ du centre du cercle.*



Démonstration. – La méthode de pesée, due à Archimède, utilise la notion de "couple" ; par définition, le couple exercé en un point O par une force F est le produit du module de la force par la distance entre le point et le vecteur. Dans la figure ci-contre, la force est représentée par le vecteur P_1P_2 et la distance par OH. Le couple est nul si la force passe par le point (situation où P_1, P_2, O sont alignés). La force est ici la pesanteur.



Nous allons déterminer le couple exercé au point O par le demi-cercle ACB, considéré comme une masse pesante (que l'on pense à du fil de fer). La densité est supposée égale à 1, si bien que la masse s'identifie à la longueur (la longueur est en mètres, la masse en kg, et la densité est de 1 kg par mètre, pour bien fixer les idées). Dans ces conditions, la masse totale est $\mu = \pi R$.

Le demi-cercle est décomposé en arcs égaux, au moyen des points équidistants $A_0 = A, A_1, ..., A_n = B$ (en langage moderne, on dirait que l'angle π est divisé en n angles égaux à $\frac{\pi}{n}$). Chacun des points reçoit la masse $\frac{\pi R}{n}$. Notons C_k la projection orthogonale de A_k sur la verticale AB. Le couple exercé en O par la masse en A_k est :

$$cp_k = \frac{\pi R}{n} A_k C_k$$

puisque tous les points ont la même masse. Le couple total exercé par l'ensemble des points est donc :

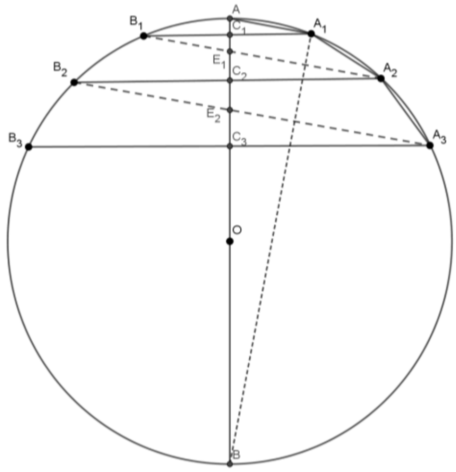
$$cp = \frac{\pi R}{n} \sum_{k=0}^{n} A_k C_k$$

Nous allons calculer cette dernière quantité. Nous introduisons les points B_k, situés sur le cercle, symétriques de A_k par rapport à l'axe vertical AB : voir figure ci-dessous.

Lemme. – *Avec les notations précédentes, on a :*

$$\frac{A_1B_1 + \cdots + A_nB_n}{AB} = \frac{BA_1}{AA_1}$$

Démonstration du lemme



Les cordes $A_1B_1, A_2B_2, ..., A_nB_n$ sont parallèles entre elles, mais aussi les cordes AA_1, B_1A_2, B_2A_3, etc. Introduisons E_1, intersection de AB avec B_1A_2, E_2, intersection de AB avec B_2A_3, etc. Les triangles AA_1C_1 et $E_1B_1C_1$ sont semblables. Il en résulte que :

$$\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{B_1C_1}{C_1E_1}$$

Mais les triangles $E_1B_1C_1$ et $E_1A_2C_2$ sont aussi semblables ; il en résulte que :

$$\frac{B_1C_1}{C_1E_1} = \frac{A_2C_2}{C_2E_1}$$

Nous obtenons donc, en réitérant ce raisonnement :

$$\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{B_1C_1}{C_1E_1} = \frac{A_2C_2}{C_2E_1} = \frac{A_1C_1 + C_1B_1 + A_2C_2 + C_2B_2 + \cdots}{AC_1 + C_1E_1 + E_1C_2 + \cdots} = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + \cdots + A_nB_n}{AB}$$

Mais les triangles AA_1C_1 et AA_1B sont aussi semblables (triangles rectangles ayant un angle commun) ; il en résulte que :

$$\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{BA_1}{AA_1}.$$

Ceci prouve le lemme.

Comme $AB = 2R$ et comme $A_kB_k = 2A_kC_k$, nous obtenons :

$$\sum_{k=1}^{n} A_kC_k = R\frac{BA_1}{AA_1}$$

et donc :

$$cp = \frac{\pi R^2}{n}\frac{BA_1}{AA_1}$$

Le centre de gravité, noté G, est situé sur l'horizontale OC passant par O (par raison de symétrie). Par définition, c'est le point tel que le couple en O est le même si toute la masse est concentrée en G. Ceci signifie :

$$cp = OG \times masse$$

où la masse est égale à πR. Par conséquent, le centre de gravité de l'ensemble des points A_k vérifie :

$$OG = \frac{\pi R^2}{n} \frac{BA_1}{AA_1} \frac{1}{\pi R} = \frac{R}{n} \frac{BA_1}{AA_1}$$

Voyons maintenant ce qui se passe lorsque n augmente : le nombre de points de subdivision tend vers l'infini.

A l'évidence, $A_1 \to A,$ et donc $BA_1 \to BA = 2R.$

Le produit nAA_1 est égal à la longueur totale des petits segments (tous ont la même longueur) ; il tend vers la longueur du demi-cercle, soit $\pi R.$ On obtient à la limite :

$$OG = \frac{2R}{\pi}$$

ce qui prouve la Proposition.