ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Une propriété de régularité pour les itérés inverses de certaines contractions de classe* C_1. Note (*) de **Bernard Beauzamy**, présentée par Laurent Schwartz.

Nous démontrons que, pour une contraction inversible de classe $C_{1\cdot}$, si les itérés inverses $\{T^{-n}x\}_{n\geq 0}$ croissent assez vite, ils forment une suite ω-linéairement indépendante, à moins que T n'ait un vecteur propre.

We prove, for the invertible $C_{1\cdot}$ *contractions on a Banach space, the following regularity result: if, for some* $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\|T^{-n}x_0\| \geqq \delta(1+\varepsilon)^n$, $\forall n$ *(for some* $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$*), then, either* T *has an eigenvalue or the sequence* $\{T^{-n}x_0\}_{n\geq 0}$ *is ω-linearly independent.*

Soit E un espace de Banach; une contraction de classe $C_{1\cdot}$ sur E est un opérateur T vérifiant :

$$\|T\|=1 \quad \text{et} \quad \forall x \neq 0 \in E, \quad T^n x \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0. \tag{1}$$

Dans [1], nous avons démontré que, dès que l'hypothèse additionnelle suivante était satisfaite

$$\left\{\begin{array}{l} \exists x_0 \in E, \quad x_0 \neq 0, \qquad \exists \text{ suite croissante } (\rho_n)_{n\geq 0}, \quad \text{avec } \rho_{m+n} \leqq \rho_m \cdot \rho_n, \\ \text{et} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{\log \rho_n}{1+n^2} < \infty \quad \text{telle que } \|T^{-n}x_0\| \leqq \rho_n, \qquad \forall n \geqq 0, \end{array}\right. \tag{2}$$

une contraction de classe $C_{1\cdot}$ avait des sous-espaces hyperinvariants non triviaux.

Nous allons ici nous intéresser aux contractions inversibles de classe $C_{1\cdot}$ ne vérifiant pas (2) et démontrer, pour certaines d'entre elles, une propriété de régularité de la suite des itérés inverses $\{T^{-n}x\}_{n\geq 0}$.

THÉORÈME. — *Soient* $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, *et soit* T *une contraction de classe* $C_{1\cdot}$, *inversible, définie sur un espace de Banach* E. *On suppose que pour un certain* $x_0 \in E$, $\|T^{-n}x_0\| \geqq \delta(1+\varepsilon)^n$, $\forall n \geqq 0$.

Alors, si T *n'a pas de vecteur propre, la suite des itérés inverses* $\{T^{-n}x_0\}_{n\geq 0}$ *est ω-linéairement indépendante : la seule série* $\sum_{n\geq 0} \gamma_k T^{-k} x_0$, *convergente dans* E, *dont la somme soit nulle est celle dont tous les coefficients* γ_k *sont nuls.*

Démonstration. — Soit $\sum_{k\geq 0} \gamma_k T^{-k} x_0 = 0$ une série convergeant vers 0 dans E. Il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|\gamma_k| \leqq C/(1+\varepsilon)^k. \tag{3}$$

Par ailleurs $\sum_{k=0}^{m} \gamma_k T^{-k} x_0 \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, et donc, puisque $\|T\|=1$,

$$\gamma_m x_0 + \ldots + \gamma_k T^{m-k} x_0 + \ldots + \gamma_0 T^m x_0 \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{4}$$

Soit $g(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ik\theta}$ une fonction de $\mathcal{A}(\mathbb{T})$ (c'est-à-dire telle que $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k| < \infty$). Dans [1], nous avons introduit la suite de fonctions

$$\varphi_m(g) = \sum_{k\geq -m} c_k e^{i(k+m)\theta}.$$

et la suite d'opérateurs

$$\psi_m(g)=\sum_{k\geq -m} c_k T^{k+m}.$$

On a $\|\psi_m(g)\|_{\text{op}}\leqq\|\varphi_m(g)\|_{\mathscr{A}(\mathbb{T})}\leqq\|g\|_{\mathscr{A}(\mathbb{T})}$, $\forall m\geqq 0$.

Posons $\varphi(\theta)=\sum_{k\geq 0}\gamma_k e^{-ik\theta}$. La condition (4) signifie exactement que $\psi_m(\varphi)(x_0)\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$.

Considérons maintenant la fonction $f(z)=\sum_{k\geq 0}\gamma_k z^k$. D'après (3), elle est analytique dans le disque de rayon $1+\varepsilon$. Soient $\zeta_1=e^{i\theta_1}$, ..., $\zeta_L=e^{i\theta_L}$ ses zéros sur le cercle trigonométrique, répétés selon leur ordre de multiplicité. On peut factoriser f en

$$f(z)=\prod_{l=1}^{L}(z-\zeta_l).h(z),$$

où $h(z)$ est une fonction analytique dans le disque de rayon $1+\varepsilon$, centré à l'origine; cette fonction ne s'annule pas sur le cercle de rayon 1. La fonction $1/h(z)$ est donc définie et analytique sur un voisinage de ce cercle; il en résulte que

$$h_1(\theta)=1/h(e^{-i\theta})\quad \text{est une fonction de } \mathscr{A}(\mathbb{T}).$$

LEMME. — *Soient u et v deux fonctions de $\mathscr{A}(\mathbb{T})$. Si $\psi_m(u)(x_0)\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$, on a aussi $\psi_m(uv)(x_0)\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$.*

Démonstration du lemme. — Soient

$$u=\sum_{k\in\mathbb{Z}}u_k e^{ik\theta},\qquad v=\sum_{j\in\mathbb{Z}}v_j e^{ij\theta},\qquad w=uv=\sum_{l\in\mathbb{Z}}w_l e^{il\theta}$$

les décompositions en série de Fourier. On a

$$\forall m\geqq 0,\quad \Big[\varphi_m(u)+\sum_{k<-m}u_k e^{i(k+m)\theta}\Big]v=e^{im\theta}uv=\varphi_m(uv)+\sum_{l<-m}w_l e^{i(l+m)\theta},$$

et donc

$$\|v.\varphi_m(u)-\varphi_m(uv)\|_{\mathscr{A}(\mathbb{T})}\leqq\sum_{l<-m}|w_l|+\|v\|_{\mathscr{A}(\mathbb{T})}.\sum_{k<-m}|u_k|\xrightarrow[m\to+\infty]{}0,$$

d'où

$$\|v(T).\psi_m(u)-\psi_m(uv)\|_{\text{op}}\xrightarrow[m\to+\infty]{}0,$$

d'où le lemme résulte aussitôt.

Puisque $\varphi(\theta)=f(e^{-i\theta})$, on peut écrire, $\forall\theta\in\mathbb{T}$

$$\varphi(\theta)=B(\theta).h(e^{-i\theta}),$$

posant

$$B(\theta)=\prod_{l=1\ldots L}(e^{-i\theta}-e^{i\theta_l})$$

et il résulte du lemme que $\psi_m(\varphi.h_1)(x_0)\xrightarrow[m\to+\infty]{}0$, c'est-à-dire $\psi_m(B)(x_0)\to 0$. Mais si $m\geqq L$, $\psi_m(B)$ s'écrit :

$$T^{m-L}\prod_{l=1\ldots L}(I-e^{i\theta_l}T).$$

Soit $y = \prod_{l=1\ldots L} ((I - e^{i\theta_l} T) x_0)$. On a donc $T^n y \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$; comme T est de classe $C_{1\cdot}$, ce n'est possible que si $y=0$, d'où il résulte immédiatement que T a un vecteur propre.

(*) Remise le 25 février 1980.

[1] B. Beauzamy, *Acta Mathematica*, 144, 1980.

Département de Mathématiques, Université de Lyon 1,
43, *boulevard du* 11-*Novembre*-1918, 69622 *Villeurbanne Cedex.*