C. R. Acad. Sci. Paris, t. 305, Série I, p. 123-126, 1987

Analyse fonctionnelle/*Functional Analysis*

Orbites tendant vers l'infini

Bernard BEAUZAMY

Résumé — Soit T un opérateur linéaire continu sur un espace de Banach. Nous donnons des conditions suffisantes pour qu'il existe un point x tel que $\|T^n x\| \to \infty$, lorsque $n \to \infty$.

On orbits tending to infinity

Abstract — *Let* T *be a linear continuous operator on a Banach space. We give sufficient conditions ensuring the existence of a point* x *such that* $\|T^n x\| \to \infty$, *when* $n \to \infty$.

Soient T un opérateur sur un espace de Banach E et x un point de E. L'orbite de x est $\{ T^n x : n \in \mathbb{N} \}$. Nous étudions la question suivante : à quelle condition (sur E, sur T) existe-t-il un point x tel que $\|T^n x\| \to \infty$?

L'étude de cette question a été motivée par celle de l'hypercyclicité, un tel point ne pouvant avoir une orbite dense. Mais elle est manifestement d'intérêt indépendant.

Le théorème de Banach-Steinhaus assure que si $\sup \|T^n\| = \infty$, il existe des points x (et même un G_δ dense de tels points) tels que $\sup \|T^n x\| = \infty$. Mais ceci ne répond à notre question en aucune façon : l'orbite peut indéfiniment « monter » et « redescendre ». Nous verrons un tel exemple au paragraphe 2, où pourtant $\|T^n\| \to \infty$.

A l'inverse, si la croissance des $\|T^n\|$ est exponentielle, le rayon spectral de T est strictement supérieur à 1, et nous avons montré dans une Note précédente [1] qu'il existait des points pour lesquels la croissance des itérés était elle-même exponentielle. La question que nous nous posons présentement se situe donc entre ces deux extrêmes.

A. RÉSULTATS POSITIFS. — Nous commençons par une version quantitative du théorème de Banach-Steinhaus.

THÉORÈME 1. — *Soit* T *un opérateur sur un espace de Banach. Soient* n_k *une suite strictement croissante d'entiers (avec* $n_1 = 0$), *et* ε_k *une suite de réels strictement positifs. Dans toute boule de rayon* 1 *ne rencontrant pas la boule unité, on peut trouver un point* x *avec*

$$\|T^{n_k} x\| \geqq 3^{1-k} (1-\varepsilon_k) \|T^{n_k}\|. \tag{1}$$

Démonstration. — Soit B_1 une boule quelconque de rayon 1 ne rencontrant pas la boule unité. La propriété (1) est satisfaite, pour $k=1$, par tout x de B_1. Supposons que nous ayons construit $B_1 \supset \ldots \supset B_{K-1}$, boules de rayon $r_k = 3^{1-k}$, de centres y_k, telles que (1) soit vrai pour tout x de $B_k (k=1, \ldots, K-1)$. On utilise alors le lemme :

LEMME 2. — *Soit* B *une boule de centre* b *et de rayon* r, *et soit* $\varepsilon > 0$. *Il existe dans* B *une boule* B′ *de rayon* $r/3$ *telle que pour tout* y *de* B′ *on ait :*

$$\|Ty\| \geqq \frac{1}{3} (1-\varepsilon) r \|T\|. \tag{2}$$

On l'applique à la boule B_{K-1}, et le point $x \in \bigcap B_k$ est le point cherché.

Le théorème 1 permet de calculer (assez grossièrement) les moments où l'orbite de x monte. Le théorème qui suit permet d'en déduire des estimations sur le moments où elle

Note présentée par Laurent SCHWARTZ.

0249-6291/87/03050123 $ 2.00

redescend, entre deux ascensions (par convention, la quantité $\|T^{-n}\|$ vaut ∞ si T n'est pas inversible).

THÉORÈME 3. — *Soit n_k une suite croissante d'entiers et m_k, $n_k<m_k<n_{k+1}$. Le point x donné au théorème 1 vérifie :*

$$\|T^{m_k}x\| \geqq 3^{1-k}(1-\varepsilon_k)\max\left(\frac{\|T^{n_k}\|}{\|T^{n_k-m_k}\|}, \frac{\|T^{n_{k+1}}\|}{\|T^{n_{k+1}-m_k}\|}\right). \tag{3}$$

En effet, le premier terme exprime la nécessité de « redescendre » de $T^{n_k}x$ à $T^{m_k}x$, le deuxième la nécessité de remonter de $T^{m_x}x$ à $T^{n_{k+1}}x$.

Quoique très grossières (à cause du facteur 3^{k-1}), les estimations (3) permettent de répondre à notre question si les normes $\|T^n\|$ croissent assez vite : plus que polynomialement, mais moins qu'exponentiellement. Nous notons pour simplifier $\tau_n=\|T^n\|$.

THÉORÈME 4. — *Si la suite τ_n est croissante et s'il existe un $\delta>0$ tel que, pour tous m et n :*

$$\log\tau_{mn} \geqq \delta\log\tau_m\log\tau_n,$$

on peut trouver un point x tel que $\|T^n x\|\to\infty$.

Démonstration. — Soit $b_n=1/(\delta\log\tau_n)$. La suite b_n est sous-multiplicative; il existe donc un p, $0<p\leqq 1$ tel que $b_n\leqq n^{-p}$, si $n>n_0$. Choisissons $n_k=k^{1/p}\log k$. Pour $k>k_0$, on a :

$$n_{k+1}-n_k \leqq \frac{4}{p}(k+1)^{1/p-1}\log(k+1),$$

$$\log\tau_{n_{k+1}}-(k-1)\log 3-\log\tau_{n_{k+1}-n_k} \geqq \frac{\delta^2}{2}(k+1)[\log(k+1)]^p-k\log 3.$$

L'estimation du théorème 3 permet alors de conclure.

Un cas particulier important où le théorème 4 s'applique est celui où $\|T^n\|=e^{n^\alpha}$, pour $0<\alpha<1$. Le rayon spectral de l'opérateur est 1, mais notre question a cependant une réponse positive. Il ne s'applique pas, en revanche, si la croissance des τ_n est seulement polynomiale, cas que nous allons maintenant examiner. Rappelons que dans [1] nous avons obtenu une réponse positive, sur un Hilbert, si $\sum 1/\|T^n\|_e^2<\infty$, où $\|T\|_e$ est la norme essentielle de T (c'est-à-dire la norme dans l'Algèbre de Calkin : $\|T\|_e=\inf\{\|T+K\|,\ K\ \textit{compact}\}$). Nous allons améliorer ce résultat. Nous notons $c_n(T)$ les nombres de Gelfand : $c_n(T)=\inf\{\|T|_{X_n}\|;\ X_n\subset E,\ \operatorname{codim} X_n<n\}$.

THÉORÈME 5. — *Si E est un espace de Hilbert et si $\sum(c_n(T^n))^{-2}<\infty$, on peut trouver un point x tel que $\|T^n x\|\to\infty$.*

Démonstration. — Posons $c_n=c_n(T^n)$, et soit b_n une suite de réels positifs tels que $b_n/c_{2^n}\to 0$, mais $\sum b_n^{-2}<\infty$. Soit x_1, $\|x_1\|=1$, tel que $\|T^2x_1\|>c_2/2$. Supposons les x_j $(j<k)$ construits, de norme 1, deux à deux orthogonaux, et tels que, si $y_j=\sum_1^j x_l/b_l$, on ait $\|T^{2^j}y_{k-1}\|>(1/2)c_{2^j}/b_j$ $(j<k)$. Pour construire x_k, on considère :

$$X_k=\{x,\ \operatorname{Re}\langle T^{*2^j}T^{2^j}y_{k-1},x\rangle=0 \text{ et } \langle x_l,x\rangle=0,\ j,\ l<k\}.$$

C'est un s. e. v. de codimension $<2k$. On choisit alors $x_k\in X_k$, de norme 1, tel que $\|T^{2^k}x_k\|>c_k/2$, et, quitte à le remplacer par son opposé, tel en outre que $\operatorname{Re}\langle T^{*2^k}T^{2^k}y_{k-1},x_k\rangle\geqq 0$. Le point $x=\sum_1^\infty x_k/b_k$ vérifie $\|T^{2^n}x\|\to\infty$, donc $\|T^n x\|\to\infty$.

En remplaçant dans la démonstration la suite $2n$ par une progression arithmétique convenable, on démontrerait de même que la conclusion subsiste si pour un certain $\delta>0$:

$$\sum (c_{\delta_n}(T^n))^{-2} < \infty.$$

Il est assez plausible que la simple condition $\sum \| T^n \|^{-2} < \infty$ suffise à assurer la conclusion. La seule condition $\| T^n \| \to \infty$ ne suffit pas, comme nous allons le voir :

B. Orbites erratiques. — Nous allons d'abord construire un opérateur sans orbite tendant vers l'infini :

Théorème 6. — *Il existe un opérateur* T *sur un espace de Hilbert avec* $\| T^n \| = \sqrt{\log n}$, *et tel que pour tout* y, $\inf \| T^n y \| = 0$.

Cet opérateur sera un shift à poids sur $l^2(\mathbb{N})$ avec $\| T^n \| = \sqrt{\log n}$. Il est défini par $T e_j = w_j e_j$, où $w_j = (\sqrt{\log n})^{1/n}$, si $2^n < j \leqq 2^n + n$, 0 sinon ($n=1, 2, \ldots$). Montrons que l'orbite de chaque y revient arbitrairement près de 0. Nous ne le ferons ici que lorsque $y = \sum a_k e_{2^k+1}$, c'est d'ailleurs le cas le plus significatif. On a

$$\| T^j y \|^2 = \sum_{k \geqq j} |\alpha_k|^2 (\log k)^{j/k}.$$

Soit $j_n = 2^{n \log n}$. On démontre facilement que :

$$\sum_{k \geqq j_n + 1} |\alpha_k|^2 (\log k)^{j_n/k} \leqq \sum_{k \geqq j_n + 1} |\alpha_k|^2 \to 0,$$

et donc, s'il existait $\delta > 0$ tel que $\| T^j y \| > \delta$ pour tout j, on aurait

$$\sum_{k = j_n + 1}^{k = j_n + 1} |\alpha_k|^2 (\log k)^{j_n/k} > \delta$$

pour n assez grand, et donc $n \log n \sum_{k = j_n + 1}^{k = j_n + 1} |\alpha_k|^2 > \delta$, ce qui est contradictoire avec le fait que $\sum |\alpha_k|^2 < \infty$.

Dans le cas de cet opérateur, toutes les orbites reviennent arbitrairement près de 0. Le fait qu'il ne soit pas injectif peut être évité : il suffit de prendre $w_j = 1/2$ là où nous mettions 0, en le répétant un nombre suffisant de fois.

Cependant, même dans ces conditions, il reste des points x tels que $\| T^n x \| \to 0$. On peut alors se poser la question suivante : pour un opérateur quelconque, l'un des deux cas suivants se produit-il nécessairement :

— il existe un point x dont l'orbite ne quitte jamais la boule unité;

— il existe un point x dont l'orbite n'y pénètre jamais.

La réponse à cette question est aussi négative :

Théorème 7. — *Il existe un opérateur sur un espace de Hilbert dont toutes les orbites sont erratiques, en ce sens que pour tout* y *dans* H ($y \neq 0$), *on a simultanément* $\sup_n \| T^n y \| = +\infty$, $\inf_n \| T^n y \| = 0$.

Esquisse de la construction. — C'est encore un shift à poids sur $l^2(\mathbb{N})$; les poids w_j sont déterminés par deux suites d'entiers $p_n < 2 p_n < q_n < p_{n+1}$. On note $B_n = [p_n, q_n[$, $B'_n = [q_n, p_{n+1}[$. Les poids w_j sont constants à l'intérieur de chaque bloc, égaux à 1/2 dans chaque B'_n, >1 dans chaque B_n. Si on note $\rho_n = \prod_{j \in B_n} w_j$, $\rho'_n = \prod_{j \in B'_n} w_j$, ils sont déterminés par les conditions : $\rho_n \rho'_n = 1/2$; $\rho_0 \rho'_0 \ldots \rho_{n-1} \rho'_{n-1} \rho_n = n$; $\prod_{p_n}^{2p_n} w_j \leqq 1 + 1/2^n$, pour tout $n > 0$.

Remarquons que dans ce dernier cas, nous n'avons plus $\| T^n \| \to \infty$. Dans une Note ultérieure, nous donnerons d'autres résultats concernant la régularité des orbites, mettant en jeu des hypothèses sur une suite x_n normant la suite T^n, c'est-à-dire une suite de points de norme 1, telle que $\| T^n x_n \| / \| T^n \| \to 1$.

Reçue le 11 mai 1987.

Référence bibliographique

[1] B. Beauzamy, Opérateurs de rayon spectral strictement supérieur à 1, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 304, série I, 1987, p. 263-266.

27, *avenue Parmentier*, 75011 *Paris*.