ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Opérateurs de rayon spectral strictement supérieur à* 1. Note de **Bernard Beauzamy**, présentée par Laurent Schwartz.

Nous montrons que si T est un opérateur de rayon spectral strictement supérieur à 1, il existe des points x tels que la croissance des itérés $\|T^n x\|$ soit exponentielle. Des applications sont données à l'hypercyclicité.

FUNCTIONAL ANALYSIS. — Operators with spectral radius strictly larger than 1.

If T *is an operator with spectral radius strictly larger than* 1, *there are points* x *such that the iterates* $\|T^n x\|$ *growth exponentially fast. Some applications to hypercyclicity are given.*

I. Rayon spectral et croissance des itérés d'un point. — Soient H un espace de Hilbert, T un opérateur (linéaire continu) sur H. On note $r=r(T)$ le rayon spectral de $T: r=\max\{|\lambda|; \lambda\in\sigma(T)\}$. La formule $r=\lim\|T^n\|^{1/n}$ montre que si $r>1$, $\|T^n\|$ tend vers l'infini exponentiellement. Mais elle ne dit rien quant au comportement des itérés $\|T^n x\|$, $x\in H$. De fait, des exemples triviaux (l'espace étant constitué de deux parties : $H=H_1\times H_2$) montrent que l'on peut donner à certaines suites $(\|T^n x\|)n\geqq 0$ un comportement arbitraire. Néanmoins :

Théorème 1. — *Soit* T *un opérateur sans valeur propre, et de rayon spectral strictement supérieur à* 1. *Pour tout* y *de* H, *pour tout* $\varepsilon>0$, *tout* a *avec* $1<a<r(T)$, *il existe* $x\in H$ *avec :*

$$\text{(a)}\qquad \|x-y\|<(1+\varepsilon)\,a/\sqrt{r^2-a^2},$$

$$\text{(b)}\qquad \|T^n x\|\geqq(1-\varepsilon)\,a^n,\qquad n\geqq 0.$$

Démonstration. — Soit $\lambda\in\sigma(T)$, avec $|\lambda|=r$. On peut trouver une suite $(x_n)_{n\geqq 1}$ de points de H, avec :

$$\|x_n\|=1,\qquad x_n\mapsto 0 \textit{ faiblement}, \quad \textit{et} \quad T x_n-\lambda x_n\mapsto 0$$

Il en résulte que :

$$(1)\qquad \|T^k x_n\|\mapsto r^k,\qquad \forall k\geqq 0,\quad \textit{lorsque } n\mapsto\infty$$

Soient maintenant $y\in H$, $\varepsilon>0$, a, avec $1<a<r$. Posons $\alpha=r/a$, et considérons le vecteur $y+x_{n_1}/\alpha$. On a :

$$\lim_{n_1\to\infty}\|T(y+x_{n_1}/\alpha)\|^2=\|Ty\|^2+r^2/\alpha^2\geqq a^2.$$

On peut donc trouver n_1 pour que, si $y_1=y+x_{n_1}/\alpha$,

$$\|y_1\|\geqq(1-\varepsilon)\,a.$$

Supposons $n_1<\ldots<n_{k-1}$ choisis de telle façon que si

$$y_j=y+x_{n_1}/\alpha+\ldots+x_{n_j}/\alpha^j,\qquad j\leqq k-1,$$

on ait

$$\|T^j y_l\|\geqq(1-\varepsilon)\,a^j,\qquad j\leqq l\leqq k-1$$

0249-6291/87/03040263 $ 2.00 © Académie des Sciences

et

$$\|y-y_l\|<(1+\varepsilon)[(a/r)^2+\ \ldots\ +(a/r)^{2l}]^{1/2},\qquad l<k.$$

On considère alors $y_{k-1}+x_{n_k}/\alpha^k$. Pour $j\leqq k$, on a :

$$\lim_{n_k\to\infty}\|T^j(y_{k-1}+x_{n_k}/\alpha^k)\|^2=\|T^j y_{k-1}\|^2+r^{2j}/\alpha^{2k}$$

et

$$\lim_{n_k\to\infty}\|y-(y_{k-1}+x_{n_k}/\alpha^k)\|^2=\|y-y_{k-1}\|^2+1/\alpha^{2k}.$$

On peut donc trouver n_k assez grand pour que, si l'on pose $y_k=y_{k-1}+x_{n_k}/\alpha^k$, on ait :

$$\|T^j y_k\|\geqq(1-\varepsilon)\,a^j,\qquad j\leqq k$$

et

$$\|y-y_k\|<(1+\varepsilon)[(a/r)^2+\ \ldots\ +(a/r)^{2k}]^{1/2}.$$

Soit $x=\lim y_k=y+\sum_{k\geqq 1} x_{n_k}/\alpha^k$. Nous obtenons :

$$\|T^j x\|\geqq(1-\varepsilon)\,a^j,\qquad \forall j\geqq 0$$

et

$$\|y-x\|<(1+\varepsilon)\,a/\sqrt{r^2-a^2},$$

ce qui prouve le théorème.

Remarque. — Dans le cas d'un espace de Banach réflexif E, la conclusion du théorème subsiste essentiellement. Le (*a*) doit être remplacé par :

$$\|y-x\|<(1+\varepsilon)\,a/(r-a)$$

et le (*b*) par :

$$\|T^j x\|\geqq\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\,a^j,\qquad \forall j\geqq 0.$$

Au lieu de la propriété

$$\lim_{n\to\infty}\|z+x_n\|^2=\|z\|^2+1$$

si x_n est de norme 1 et tend vers 0 faiblement, valable dans un Hilbert, on utilise en effet le :

LEMME 2. — *Soit* E *un espace de Banach. Pour toute suite* $\{x_n\}$ *de norme* 1, *faiblement convergente vers* 0, *et tout* z *de* E, *on a :*

$$\limsup_{n\to\infty}\|x_n+z\|\geqq\max\{1/2,\ \|z\|\}.$$

Le théorème 1 admet certaines extensions. Remarquons en effet qu'il n'est nullement nécessaire d'utiliser la même suite (x_n) à chaque étape de la démonstration : ce qui compte est le fait que $\| T x_n \| \mapsto r$, et non celui que $T x_n - \lambda x_n \mapsto 0$. Par conséquent, nous pouvons définir :

$$\lambda(T) = \sup \{ \limsup \| T x_n \| ; \| x_n \| = 1, \, x_n \textit{ tend vers } 0 \textit{ faiblement} \}.$$

Cette quantité (comme nous l'a fait observer David Berg) n'est autre que $\| T \|_e$, norme de T dans l'algèbre de Calkin (c'est-à-dire $\inf \{ \| T + K \| ; K \textit{ compact} \}$).

Nous observons aussi que la série définissant x peut n'être pas absolument sommable : de carré sommable suffit, dans l'espace de Hilbert, car les vecteurs considérés sont presque orthogonaux. La même démonstration permet ainsi d'obtenir :

THÉORÈME 3. — *Soit* T *un opérateur sur un espace de Hilbert, avec* $\sum 1/\| T^n \|_e^2 < \infty$. *Soit* $\{ a_n \}$ *une suite* avec $\sum 1/a_n^2 < \infty$ *et* $\| T^n \|_e / a_n \mapsto \infty$. *Pour tout* y *dans* H, *tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* x *dans* H *avec :*

$$\| y - x \| \leqq (1 + \varepsilon) \sum_{n \geqq 1} 1/a_n^2$$

$$\| T^n x \| \geqq (1 - \varepsilon) \| T^n \|_e / a_n, \qquad n \geqq 0.$$

II. OPÉRATEURS HYPERCYCLIQUES. — Un point x de H est dit *hypercyclique* pour T si $H = \mathrm{span} \{ x, Tx, \ldots \}$. L'opérateur T sera dit *hypercyclique* si tous les points (sauf évidemment 0) sont hypercycliques. On ne sait pas s'il existe de tels opérateurs, sur un espace de Hilbert ou même sur un espace de Banach; l'exemple construit par l'auteur dans une Note précédente [1] possède seulement la propriété suivante : il a un point hypercyclique x_0 et tous les points de la forme $p(T) x_0$, où p est un polynôme à coefficients complexes, sont aussi hypercycliques. Nous pouvons cependant établir :

THÉORÈME 4. — *Tout opérateur hypercyclique sur un espace de Banach réflexif doit vérifier* $\| T \| > 1$, $r(T) = 1$.

Démonstration. — Il est trivial que $\| T \| > 1$ est nécessaire. Fixons maintenant un point $x_0 \neq 0$. Pour tout $x \neq 0$, il existe une suite $n_k \mapsto \infty$ telle que $T^{n_k} x \mapsto x_0$. Donc $\lim \| T^{n_k} \|^{1/n_k} \geqq 1$, et $r(T) \geqq 1$.

Le fait que $r(T) > 1$ soit exclu résulte du théorème 1 (dans le cas d'un espace de Hilbert), ou de la remarque qui le suit (dans le cas d'un espace réflexif).

Remarque 5. — Grâce au théorème 3, cet énoncé peut être renforcé : si T est hypercyclique sur un Hilbert, il vérifie nécessairement $\sum 1/\| T \|_e^2 = \infty$ (*sur un Banach réflexif*, $\sum 1/\| T \|_e = \infty$). Cette conclusion est plus précise que la précédente, car $r(T) \leqq \| T \|_e$, et $r(T)^n \leqq \| T^n \|_e$.

Remarque 6. — Une question ouverte (et, me semble-t-il, une conjecture raisonnable) est qu'un opérateur sur un Hilbert tel que $\| T \| = r(T)$ doit avoir des sous-espaces invariants non triviaux. Le théorème 4 montre qu'un tel opérateur ne peut être hypercyclique, ce qui est un (petit) pas dans cette direction.

Si un point x est hypercyclique, ses itérés viendront dans un voisinage arbitraire de tout point x_0. On peut s'interroger sur le temps qu'il faut pour cela : fixons α, $0 < \alpha \leqq 1$, et considérons $B^\circ = B^\circ(x_0, \alpha)$, boule ouverte de centre x_0 et de rayon α. Pour $x \in H$, $x \neq 0$, soit

$$N(x) = \inf \{ k, \, T^k x \in B^\circ \}$$

qui est l'analogue d'un « temps d'arrêt ». La fonction N est trivialement semi-continue supérieurement, et, si T est hypercyclique, elle est partout finie. Mais on peut établir :

THÉORÈME 7. — *Soit* T *un opérateur sur un Hilbert avec* $r(T)=1$. *Pour tout* y *de* H,

$$\sup\{N(x),\ \|y-x\|<2\alpha\}=\infty.$$

Ce théorème résulte trivialement de l'énoncé suivant :

PROPOSITION 8. — *Soit* T *un opérateur sur un Hilbert avec* $r(T)=1$. *Soit* $\{\alpha_n\}$ *une suite décroissante de réels positifs, tendant vers* 0, *et soit* $\varepsilon>0$. *Pour tout* y *de* H, *il existe* x *avec :*

$$\|y-x\|\leqq(1+\varepsilon)\alpha_1, \qquad et \qquad \|T^k x-x_0\|\geqq(1-\varepsilon)\alpha_k.$$

Démonstration. — Soit $\lambda\in\sigma(T)$, avec $|\lambda|=1$, et soit $\{x_n\}$ une suite de points de H avec $\|x_n\|=1$, $x_n\mapsto 0$ faiblement, et $Tx_n-\lambda x_n\mapsto 0$.

On prend

$$x=y+(\alpha_1^2-\alpha_2^2)^{1/2}x_{n_1}+\ \dots\ +(\alpha_k^2-\alpha_{k+1}^2)^{1/2}x_{n_k}+\ \dots$$

pour une suite (n_j) tendant vers l'infini suffisamment vite. Les détails sont assez semblables à ceux du théorème 1 et sont laissés au lecteur.

Reçue le 19 janvier 1987.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[1] B. BEAUZAMY, Un opérateur, sur l'espace de Hilbert, dont tous les polynômes sont hypercycliques, *Comptes rendus*, 303, série I, 1986, p. 923-926.

27, *avenue Parmentier*, 75011 *Paris*.