ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Opérateurs pseudo-différentiels et théorèmes de factorisation.* Note (*) de M. **Bernard Beauzamy**, transmise par M. Laurent Schwartz.

On donne d'abord une condition nécessaire et suffisante pour que tout opérateur pseudo-différentiel d'une classe S^m possède une propriété de factorisation. On étudie ensuite le lien entre de telles propriétés et des théorèmes de continuité.

NOTATIONS. — On désignera par $S^m(X, \Xi)$ la classe des fonctions (symboles) $a(x, \xi)$, C^∞ en x et ξ sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$, et vérifiant :

$$\forall N > 0, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n, \quad (1+|x|^2)^N |D_x^\alpha D_\xi^\beta a(x, \xi)| \leqq C_{\alpha, \beta, N}(1+|\xi|^2)^{(m-|\beta|/2)}.$$

L'opérateur pseudo-différentiel A de symbole $a(x, \xi)$ est défini par

$$\forall u \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n), \quad A u(x) = \int e^{ix\xi} a(x, \xi) \hat{u}(\xi) \, d\xi.$$

Si $a(x, \xi) \in S^m$, A est dit de classe m [*voir* (4)].

Si A est un opérateur continu de $L^p(\mathbf{R}^n)$ dans $L^p(\mathbf{R}^n)$, on dira que A se factorise par $L^q(\mathbf{R}^n)$ et la multiplication par une fonction φ de $L^a(\mathbf{R}^n)$ $[(1/p) = (1/q)+(1/a)]$ s'il existe un opérateur linéaire continu B de $L^p(\mathbf{R}^n)$ dans $L^q(\mathbf{R}^n)$ tel que l'on ait $A f = \varphi . B(f)$, pour toute fonction f de $L^p(\mathbf{R}^n)$ [*voir* (2)].

PROPOSITION 1. — *Soient p et q deux réels tels que $1 < p < q < \infty$. Une condition nécessaire et suffisante pour que tout opérateur de classe m, continu de L^p dans L^p, se factorise par L^q et la multiplication par une fonction de L^a $[(1/p) = (1/q)+(1/a)]$, est que l'on ait*

$$m \leqq -n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right). \tag{1}$$

Démonstration. — La condition nécessaire est obtenue en considérant un opérateur de symbole $p(x, \xi) = a(x)(1+|\xi|^2)^{m/2}$, où $a(x) \in \mathcal{S}$ (ensemble des fonctions C^∞ à décroissance rapide, ainsi que leurs dérivées), et en utilisant les inégalités de Sobolev [*voir* (1)].

— Pour la condition suffisante, on remarque que, compte tenu des hypothèses faites sur les classes S^m, on a un isomorphisme [*voir* (3)] :

$$S^m(X, \Xi) \approx \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \tilde{\otimes}_\pi S^m(\Xi)$$

et on peut donc décomposer

$$a(x, \xi) = \sum_0^\infty \lambda_k a_k(x) b_k(\xi),$$

où λ_k est une suite sommable, et a_k et b_k tendent vers zéro quand k tend vers l'infini, dans $\mathcal{S}$ et S^m respectivement. On considère alors les opérateurs A_K de symbole $a_K(x, \xi)$, avec

$$a_K(x, \xi) = \sum_{k=1}^K a_k(x, \xi) = \sum_{k=1}^K \lambda_k a_k(x) b_k(\xi).$$

On obtient pour ces opérateurs la factorisation souhaitée en utilisant le théorème de Mihlin et les inégalités de Sobolev; le résultat pour A se déduit alors de la condition de factorisation de ([2]).

Remarque. — Il résulte de ([1]) que, dans le cas $1 < p \leqq 2 \leqq q$, la condition (1) est équivalente au fait que tout opérateur de classe m soit continu de L^p dans L^q. Elle y est nécessaire si $2 \leqq p \leqq q$ ou $p \leqq q \leqq 2$, la condition stricte

$$(1') \qquad m < -n\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)$$

étant alors suffisante. Ces résultats, joints à la proposition 1, signifient que, dans les cas mentionnés, les opérateurs de classe m opèrent de L^p dans $L^p \cap L^q$. On montre alors aisément que, dans le diagramme de factorisation, la multiplication peut être prise dans $L^\infty \cap L^a$. On obtient donc :

PROPOSITION 2. — *Dans le cas $1 < p \leqq 2 \leqq q < \infty$, la condition* (1) *est nécessaire et suffisante pour que tout opérateur de classe m, continu de L^p dans L^p, se factorise par L^q et la multiplication par une fonction de $L^\infty \cap L^a$ $[(1/p) = (1/q)+(1/a)]$. Si $2 \leqq p < q < \infty$ ou $1 < p \leqq q \leqq 2$, la condition* (1) *est nécessaire à cette factorisation, et la condition* (1') *suffisante.*

On peut donc se demander dans quel cas un opérateur pseudo-différentiel continu de L^p dans L^p, se factorisant par L^q, opère en fait de L^p dans $L^p \cap L^q$.

Soit A un opérateur pseudo-différentiel continu de L^p dans L^p. Désignons par Y (A) l'ensemble des $y \in R^n$ tels que les opérateurs A_y de symbole $a(x-y, \xi)$ (qui sont continus de L^p dans L^p), se factorisent par L^q et la multiplication par une même fonction $g \in L^a$.

PROPOSITION 3. — *Soit* A *un opérateur pseudo-différentiel continu de L^p dans L^p. On suppose que* A *se factorise par L^q, $1 < p < q < \infty$, et la multiplication par une fonction de L^a, $(1/p) = (1/q)+(1/a)$. On suppose en outre qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que la boule de centre* O *et de rayon ε soit incluse dans l'ensemble* Y (A). *Alors* A *est continu de L^p dans L^q.*

Démonstration. — On a supposé que, pour $|y| \leqq \varepsilon$, les opérateurs A_g se factorisaient tous par la multiplication par une même fonction g de L^a. On en déduit que, pour tout y, $|y| \leqq \varepsilon$, on a, pour tout $f \in L^p$:

$$\left\|\frac{A f(x)}{g(x+y)}\right\|_{L^q(dx)} \leqq \|f\|_{L^p}.$$

Il en résulte que

$$\left\|\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{A f(x)}{g(x+y)} dy\right\|_{L^q(dx)} \leqq C(\varepsilon)\|f\|_{L^p}$$

et on montre aisément en utilisant l'inégalité de Bienaymé - Tchebycheff que $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} (1/g(x+y))\, dy$ est minoré indépendamment de x.

Le résultat s'en déduit aussitôt.

Il est clair que, pour un opérateur de symbole $a(x)\, b(\xi)$, l'hypothèse de la proposition 3 est vérifiée : les fonctions $a_y(x) = a(x-y)$ sont dans f et, si $|y| < \varepsilon$, elles peuvent être majorées par une même fonction de f. Mais ceci évidemment est faux pour tout y de $\mathbf{R}^n$. Nous allons voir à quoi correspond ce résultat dans le cas général.

Notons B_y l'opérateur défini par la factorisation

$$A_y(f) = g . B_y(f).$$

Proposition 4. — *Soit A un opérateur pseudo-différentiel continu de L^p dans L^p, se factorisant par L^q et la multiplication par une fonction de L^a. Si l'ensemble Y contient une demi-droite et si les normes $\| B_y \|$ sont bornées indépendamment de $y \in Y$, alors A est l'opérateur nul.*

Démonstration. — On montre que A se factorise par la multiplication par des fonctions g de L^a dont la norme peut être choisie arbitrairement petite, tandis que la norme $\| A f/g \|_{L^q}$ reste bornée.

En effet, se ramenant au cas où Y contient le demi-axe $y_1 \geqq 0$, on considère la fonction

$$g_T(x) = \frac{1}{T} \int_0^T g(x_1 + y_1, x') \, dy_1,$$

où $x = (x_1, x')$, et g est une fonction qui convient pour la factorisation de A.

On montre par interpolation que $\| g_T \|_{L^a} \to 0$ lorsque $T \to \infty$, et que g_T convient pour la factorisation de A, ce qui achève la démonstration.

(*) Séance du 9 juillet 1973.

(1) L. Hörmander, *Amer. Math. Soc. Sym. Pure Math.*, 10, 1966, p. 138-183.

(2) B. Maurey, *Théorèmes de factorisation dans les espaces* L^p (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1972-1973, exp. 3 et 4, École Polytechnique).

(3) F. Trèves, *Topological vector spaces, Distributions and kernels*, Academic Press, New York, 1967.

(4) A. Unterberger, *Opérateurs pseudo-différentiels* (*Séminaire Goulaouic-Schwartz*, 1970-1971, exp. 3 et 4, École Polytechnique).

Centre de Mathématiques
de l'École Polytechnique,
17, rue Descartes,
75230 Paris-Cedex 05.