THÉORIE DES PROBABILITÉS. — *Convergence ou divergence presque sûres des sommes de Césaro dans un Espace de Banach.* Note (*) de **Bernard Beauzamy,** présentée par M. Jacques-Louis Lions.

Nous étudions le comportement des moyennes $(1/n)\sum_1^n \varepsilon_k y_k$ (lorsque $n \to \infty$), pour une certaine sous-suite $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ d'une suite $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ donnée, bornée, dans un espace de Banach: les $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbf{N}}$ sont des signes arbitraires.

We study the almost sure convergence or the almost sure divergence of the Cesaro means $1/n \sum_1^n \varepsilon_k y_k$, *for some subsequence* $(y_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *of a given sequence* $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *in a Banach space. The* $(\varepsilon_k)_{k\in\mathbf{N}}$ *are random choices of signs.*

Le but de cette Note est de démontrer le théorème suivant, qui améliore et précise les résultats obtenus par A. Brunel et L. Sucheston dans (3) et ceux obtenus par l'auteur dans (1) (§ III) :

THÉORÈME. — *Soit* $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *une suite bornée dans un espace de Banach. Il existe une sous-suite* $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *de* $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *qui possède l'une ou l'autre des propriétés suivantes :*

(*a*) *pour toute sous-suite* $(z_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *de* $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$, *pour presque tout choix de signes* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *(au sens de la mesure produit sur* $\{-1, +1\}^{\mathbf{N}}$*), on a*

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i z_i \to 0, \qquad n \to \infty;$$

(*b*) *il existe un nombre* $\delta > 0$ *tel que, pour toute sous-suite* $(z_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *de* $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$, *pour toute suite de signes* $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbf{N}}$, *pour tout* $n \in \mathbf{N}$,

$$\left\| \frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i z_i \right\| \geqq \delta.$$

Principe de la démonstration. — Notons $\varepsilon_n(t)$ les fonctions de Rademacher sur [0, 1]. Si l'on veut montrer qu'une suite $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ possède la propriété (*a*), il suffit, d'après (4), de montrer que pour toute sous-suite $(z_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$,

$$(1) \qquad \int \left\| \frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k(t)\, z_k \right\| dt \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Soit maintenant $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite bornée dans un espace de Banach. Si elle contient une sous-suite fortement convergente, on aura (1) en vertu des inégalités de Khintchine. Sinon, on peut extraire de la suite $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une sous-suite, encore notée $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$, constituée de vecteurs linéairement indépendants et vérifiant $\inf_{i\neq j} \| x_i - x_j \| > 0$. C'est dans ce cas que nous nous plaçons désormais.

Nous utiliserons la proposition suivante, due à Brunel-Sucheston (2) :

PROPOSITION (*extraction de bonnes sous-suites*). — *Soit* $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ *une suite bornée dans un espace de Banach. Il existe une sous-suite* $(x_i')_{i\in\mathbf{N}}$ *telle que la limite* $\mathrm{Lim}\, \| a_1 x'_{n_1} + \ldots + a_k x'_{n_k} \|$ *existe, pour tout* k, *pour toute suite finie de scalaires* $a_1, \ldots, a_k$, *lorsque* $n_1 < \ldots < n_k$ *tendent vers l'infini.*

Soit $(e_i)_{i\in\mathbf{N}}$ la base canonique de $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$, on note $|a_1 e_1 + \ldots + a_k e_k|$ la limite précédente. C'est une norme sur $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ (ou $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$) lorsque la suite $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ n'a pas de sous-suite fortement convergente. Le complété de $\mathbf{R}^{(\mathbf{N})}$ (ou $\mathbf{C}^{(\mathbf{N})}$) pour cette norme, noté F, s'appelle le modèle étalé de E construit sur la suite $(x_i)_{i\in\mathbf{N}}$ [*voir* ([1])].

D'après la définition de ce modèle, on peut, pour tout k, trouver un entier ν_k tel que, si $\nu_k \leqq n_1 < n_2 < \ldots < n_{2^k}$, on ait, pour tout choix de $\tilde{\varepsilon}_1, \ldots, \tilde{\varepsilon}_{2^k}$, valant $+1$, 0, ou -1,

$$\frac{1}{2}\left|\sum_1^{2^k}\tilde{\varepsilon}_i e_i\right| \leqq \left\|\sum_1^{2^k}\tilde{\varepsilon}_i x'_{n_i}\right\| \leqq \frac{3}{2}\left|\sum_1^{2^k}\tilde{\varepsilon}_i e_i\right|.$$

La suite $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$ cherchée sera la sous-suite $(x'_{\nu_i})_{i\in\mathbf{N}}$. On remarquera qu'elle ne dépend pas des propriétés (*a*) ou (*b*) : il s'agit d'un choix en quelque sorte « fonctoriel ». Nous allons maintenant montrer qu'elle possède bien les propriétés voulues.

On pose

$$a_n = \int\left|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_k(t)\, e_k\right| dt \quad \text{et} \quad n' = [\log_2 n].$$

(*a*) Supposons que $a_n \to 0$, $n \to \infty$. Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons n_0 assez grand pour que, si $n \geqq n_0$, $n'/n \sup_{i\in\mathbf{N}} \|x_i\| < \varepsilon/4$ et $a_n < \varepsilon/4$. On aura alors, pour toute sous-suite $(z_i)_{i\in\mathbf{N}}$ de $(y_i)_{i\in\mathbf{N}}$:

$$\int\left\|\frac{1}{n}\sum_1^n \varepsilon_i(t)\, z_i\right\| dt \leqq \frac{n'}{n}\sup_i \|x_i\| + \frac{3}{2}\int\left|\frac{1}{n}\sum_{n'+1}^n \varepsilon_i(t)\, e_i\right| dt$$

$$\leqq \frac{2\,n'}{n}\sup_i \|x_i\| + a_n \leqq \varepsilon;$$

et il en résulte que le cas (*a*) se produit.

(*b*) Supposons que $a_n \not\to 0$, $n \to \infty$. Soit $\theta = \limsup_{n\to\infty} a_n$. On démontre comme dans ([1]) que $a_n \geqq \theta$ et $a_n \to \theta$. Soit $(f_i)_{i\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires équi-distribuées suivant la loi gaussienne normale sur $\mathbf{R}$. Il résulte de ([5]), lemme 2.4 *a* que

$$\theta_1 = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\int\left|\sum_{k=1}^n (e_{2k} - e_{2k-1})\, f_k(t)\right| dt > 0.$$

Choisissons M assez grand pour que $\int_{|f_1|>M} |f_1(t)|\, dt < \theta_1/4$, et posons $f'_i(t) = f_i(t)$ si $|f_i| \leqq M$, $= 0$ sinon.

Pour tout n d'une sous-suite des entiers, on en déduit, pour un certain $t_0 \in \mathbf{R}$:

$$\frac{1}{n}\left|\sum_1^n (e_{2i} - e_{2i-1})\, f'_i(t_0)\right| \geqq \frac{\theta_1}{4},$$

et, en utilisant l'inconditionnalité des différences $e_{2i} - e_{2i-1}$ [*voir* par exemple ([1])] :

$$\frac{1}{n}\left|\sum_1^n (e_{2i} - e_{2i-1})\right| \geqq \frac{\theta_1}{4\,\mathrm{M}},$$

d'où, d'après ([1]), pour tout $n \in \mathbf{N}$, tout choix de signes $\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_n$,

$$\frac{1}{n}\left|\sum_1^n \varepsilon_k e_k\right| \geqq \frac{\theta_1}{16\,\mathrm{M}}$$

On pose $\theta_2 = \theta_1/16\,M$. Soit $(z_i)_{i \in N}$ une sous-suite quelconque de $(y_i)_{i \in N}$. En découpant la somme $\sum_1^n \varepsilon_k z_k$ en $\sum_1^{n'} + \sum_{n'+1}^n$, on obtient, d'après la construction de la sous-suite $(y_i)_{i \in N}$:

$$\frac{1}{n} \left\| \sum_1^n \varepsilon_k z_k \right\| \geqq \theta_2 - \frac{2n'}{n} \sup_i \| x_i \|$$

et donc

$$\left\| \frac{1}{n} \sum_1^n \varepsilon_k z_k \right\| \geqq \frac{\theta_2}{2}$$

si $n > n_0$; l'énoncé (*b*) en résulte facilement.

Remarque. — Dans le cas (*a*), on ne peut pas remplacer « pour presque tout choix de signes » par « pour tout choix de signes ». Si en effet E est un espace possédant la propriété ABS (Alternate Signs Banach-Saks) mais pas la propriété de Banach-Saks [*voir* (1)], pour toute suite bornée $(x_i)_{i \in N}$ dans E, le cas (*a*) se produira (puisque E a ABS), mais, pour une suite au moins dans l'espace, les moyennes avec les signes $+ \left((1/n) \sum_1^n z_k \right)$ ne convergeront pour aucune sous-suite. Un exemple de tel espace est c_0, un exemple de telle suite est la « base sommante » de c_0 : $e_1 + \ldots + e_n$, où e_i est la base canonique.

Il résulte en revanche de (1) que le choix de signes alternés $+, -, +, -, \ldots$ convient pour toutes les sous-suites.

(*) Séance du 12 juin 1978.

(1) B. Beauzamy, *Banach-Saks Properties and Spreading Models*, Preprint, École Polytechnique.

(2) A. Brunel et L. Sucheston, *Trans. A.M.S.*, 204, 1975, p. 79-90.

(3) A. Brunel et L. Sucheston, *On Sequences Invariant under Spreading in Banach Spaces* (*Lecture Notes* n° 526, p. 21-30, Springer-Verlag).

(4) J. Kuelbs et J. Zinn, *Some Stability Results for Vector Valued Random Variables*, Preprint.

(5) B. Maurey et G. Pisier, *Studia. Math.*, 58, 1976, p. 45.

Centre de Mathématiques de l'École polytechnique
et *Université de Paris-Sud - Orsay*, 91000.