THÉORIE DES PROBABILITÉS. — *Une loi forte des grands nombres pour des variables aléatoires non intégrables.* Note (*) de **Bernard Beauzamy** et **Sylvie Guerre**, présentée par M. Laurent Schwartz.

Nous définissons, pour des variables aléatoires réelles possédant un moment d'ordre $\alpha$, $0<\alpha<1$, un procédé de sommation qui généralise les sommes de Césaro. Nous obtenons, pour ce procédé, un résultat analogue à la loi forte des grands nombres. Pour des variables à valeurs dans un espace $L^p$ $(1<p\leqq 2)$, le résultat est obtenu sous des hypothèses plus faibles que celles nécessitées par la loi usuelle.

*We introduce a summation process, generalizing the Cesaro averages, which allows us to obtain a strong law of large numbers for independent random variables satisfying, for some* $\alpha$, $0<\alpha<1$, $\sup_k \mathrm{E}\|X_k\|^\alpha<\infty$. *Also, for variables with values in* $L^p$, $1<p\leqq 2$, *we obtain a result under hypotheses weaker than those of the usual law.*

Soient $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espace de probabilité, $(X_k)$ une suite de variables aléatoires réelles, définies sur cet espace. Si $p$ est un réel avec $1<p<\infty$, nous notons (pour chaque $\omega\in\Omega$) $S_n(\omega)$ le point où la fonction convexe

$$t \to \varphi_n(t, \omega)=\frac{1}{n}\sum_1^n |t-X_k(\omega)|^p$$

atteint son minimum. On définit ainsi une variable aléatoire, car $S_n(\omega)$ dépend continûment des données $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Le point $S_n(\omega)$ est, au sens défini et étudié dans ([1]) et ([2]), un point minimal par rapport aux points $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$. Les trois propriétés suivantes en résultent clairement :

— le procédé est homogène d'ordre 1 : si les $X_k$ sont remplacés par $\lambda X_k$, $S_n$ est remplacé par $\lambda S_n$;

— si $(X'_k)$ est une autre suite de v. a. r. définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et si $X'_k-X_k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ p. s., alors, si $S'_n$ est calculé sur les $X'_k$, on a $S'_n-S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ p.s.;

— si $p=2$, on a pour tout $\omega$, $S_n(\omega)=(1/n)\sum_1^n X_k(\omega)$.

Les « sommes » $S_n$ généralisent donc les sommes de Césaro; nous allons établir pour elles une loi forte des grands nombres :

PROPOSITION 1. — *Si les* $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *sont indépendantes, possèdent un moment d'ordre* $p-1$ *et vérifient* $\mathrm{E}(|X_k(\omega)|^{p-1}\operatorname{Sgn} X_k(\omega))=0$ *(ce qui est le cas si les* $X_k$ *sont symétriques) et si en outre :*

— *ou bien les* $X_k$ *sont équidistribuées;*

— *ou bien, pour un* $q>p-1$, *on a* $\sup_n \mathrm{E}|X_k|^q<\infty$.

*les sommes* $S_n$ *convergent presque sûrement vers* 0.

*Démonstration.* — Pour $\omega$ fixé, la fonction $\varphi_n(t, \omega)=\varphi_n(t)$ est dérivable et a pour dérivée

$$\varphi'_n(t)=\frac{1}{n}\sum_1^n |t-X_k(\omega)|^{p-1}\operatorname{Sgn}(t-X_k(\omega)).$$

Les hypothèses faites impliquent clairement, au vu de la loi forte usuelle, que les dérivées $\varphi'_n(0)$ convergent vers 0 p. s. Mais puisque $\varphi_n(t)$ est convexe

$$0\leqq\varphi_n(0)-\varphi_n(S_n)\leqq|S_n|\cdot|\varphi'_n(0)|.$$

Par ailleurs on sait [*voir* [1] ou [3]] que les fonctions $\varphi_n$ croissent assez vite au voisinage de leur minimum : il existe une constante C telle que

$$C\,|\,S_n(\omega)\,|^r \leqq \varphi_n(0)-\varphi_n(S_n),$$

avec $r=2$ si $p\leqq 2$, $r=p$ si $p\geqq 2$; dans les deux cas $r>1$. Il en résulte que

$$C\,|\,S_n(\omega)\,|^{r-1} \leqq |\,\varphi'_n(0)\,|,$$

ce qui prouve la proposition.

La notion de point minimal par rapport à un ensemble permet d'étendre les définitions précédentes aux variables à valeurs dans un espace de Banach; le procédé ainsi construit se révèle être particulièrement bien adapté aux espaces $L^p(1<p<\infty)$.

Soit maintenant $(X_k)_{k\in N}$ une suite de variables à valeurs dans $L^p([0, 1], d\tau)$, définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. On considère de même la fonction

$$\varphi_n(z, \omega)=\frac{1}{n}\sum_1^n \|\,z-X_k(\omega)\,\|_{L^p}^p, \qquad z\in L^p([0, 1], d\tau).$$

Cette fonction atteint son minimum en un point unique, noté $S_n(\omega)$. La fonction $S_n(\omega)(\tau)$ peut être calculée point par point : on vérifie en effet qu'elle est presque partout égale à la valeur où la fonction réelle

$$t\to\frac{1}{n}\sum_1^n |\,t-X_k(\omega)(\tau)\,|^p$$

prend son minimum. Elle possède en outre les propriétés déjà mentionnées dans le cas réel. Là encore, nous obtenons une loi forte des grands nombres :

PROPOSITION 2. — *Si les* $(X_k)_{k\in N}$, *à valeurs dans* $L^p$, *sont indépendantes, possèdent un moment d'ordre* $p-1$, *et vérifient* $\mathbf{E}(\,|\,X_k\,|^{p-1}\,\mathrm{Sgn}\,X_k)=0$, *et si en outre, on a* [*en notant* $q=p/(p-1)$] :

$$-\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\mathbf{E}\,\|\,X_k\,\|_{L^p}^{2(p-1)}<\infty \quad si \quad 1<p\leqq 2,$$

$$-\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^q}\mathbf{E}\,\|\,X_k\,\|_{L^p}^{p}<\infty \quad si \quad 2\leqq p<\infty,$$

*les quantités* $\|\,S_n(\omega)\,\|_{L^p}$ *tendent vers* 0 *p. s. lorsque* $n\to+\infty$.

La démonstration est voisine de celle du cas réel. On pose

$$X'_k(\omega)(\tau)=|\,X_k(\omega)(\tau)\,|^{p-1}\,\mathrm{Sgn}\,X_k(\omega)(\tau);$$

les $X'_k$ sont des v. a. définies sur $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, à valeurs dans $L^q([0, 1], d\tau)$. Si $1<p\leqq 2$, l'espace $L^q$ est de type 2-Rademacher, et, d'après un résultat de J. Hoffmann-Jørgensen et G. Pisier [4], les sommes de Césaro $(1/n)\sum_1^n X'_k$ convergent vers 0 p. s., puisque les conditions $\mathbf{E}\,X'_k=0$, $\sum_k (1/k^2)\,\mathbf{E}\,\|\,X'_k\,\|_{L^q}^2<\infty$ sont satisfaites. La convergence des $\|\,S_n(\omega)\,\|_{L^p}$ vers 0, p. s. en résulte comme dans le cas réel, en utilisant la différentielle de la fonction $z\to\varphi_n(z, \omega)$ ($\omega$ fixé), au point 0.

Dans le cas $2 \leqq p < \infty$, la convergence de $(1/n) \sum_1^n X'_k$ vers 0 a lieu dès que $\mathbf{E}\, X'_k = 0$, $\sum_k (1/k^q)\, \mathbf{E}\, \| X'_k \|_{L^q}^q < \infty$, puisque $L^q$ est alors de type $q$-Rademacher.

Lorsque $1 < p \leqq 2$, la loi forte usuelle réclame $\sum_k (1/k^p)\, \mathbf{E}\, \| X_k \|_{L^p}^p < \infty$; les hypothèses de la proposition 2 sont plus faibles; en particulier elles n'impliquent même pas l'existence d'un moment d'ordre $p$. Lorsque $2 \leqq p < \infty$, elles sont au contraire plus fortes.

Le procédé de sommation introduit ici s'applique à l'étude de diverses autres questions, où il remplace les sommes de Césaro; il a notamment été utilisé par P. Enflo et le premier auteur pour obtenir des résultats sur les points fixes des contractions [*voir* ([3])].

(*) Séance du 14 novembre 1977.

([1]) B. Beauzamy, *Comptes rendus*, 280, série A, 1975, p. 717.
([2]) B. Beauzamy et B. Maurey, *J. Funct. Anal.*, 24, n° 2, février 1977, p. 107-139
([3]) B. Beauzamy et P. Enflo, *Théorèmes de point fixe et d'approximation* (à paraître dans *Michigan J. Math.*)
([4]) J. Hoffmann-Jørgensen et G. Pisier, *Ann. Prob.*, 4, n° 4, 1976, p. 587-599.

*Université Paris-Sud,*
91000 *Orsay*
et
*Centre de Mathématiques*
*de l'École Polytechnique de Palaiseau,*
91128 *Palaiseau Cedex.*