ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Représentation fonctionnelle des séries convergentes utilisant les itérés d'un point par une contraction de classe* C_1. Note (*) de **Bernard Beauzamy** et **Michel Rome,** présentée par Laurent Schwartz.

Soit T une contraction inversible, complètement non unitaire, de classe $C_{1^\cdot}$, sur un espace de Hilbert E. Nous montrons que pour tout $x_0 \in E$, avec $x_0 \neq 0$, il existe une fonction $\Lambda_{x_0}(\theta)$ sur le tore, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, et telle que, pour toute série convergente $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k x_0$ la fonction $\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ soit de carré intégrable par rapport à la mesure $\check{\Lambda}_{x_0} . d\theta/2\pi$.

Let T be a completely non-unitary, invertible, $C_{1^\cdot}$ contraction on a Hilbert space E. *For every* $x_0 \in E$, $x_0 \neq 0$, *there exists a positive function* $\check{\Lambda}_{x_0}(\theta)$, *integrable with respect to Lebesgue measure, such that every convergent series* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k x_0$ *defines a function* $\varphi(\theta) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ *which is square summable with respect to the measure* $\check{\Lambda}_{x_0} . d\theta/2\pi$. *Several consequences are derived.*

Soit E un espace de Hilbert. Une contraction T est de classe $C_{1^\cdot}$, si $\|T\| = 1$ et si, pour tout $x \neq 0$, $T^n x \underset{n\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$. Elle est complètement non unitaire s'il n'existe aucun sous-espace fermé $F \subset E$ tel que $TF = F$ et tel que la restriction de T à F soit unitaire.

Nous supposons de plus T inversible.

THÉORÈME 1. — *Soit* T *une telle contraction. Pour tout* $x_0 \in E$ *avec* $x_0 \neq 0$, *il existe une fonction* $\Lambda_{x_0}(\theta)$, *définie sur le tore* $\mathbb{T}$, *positive et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue, et telle que, pour toute série convergente* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k T^k x_0$, *la série de Fourier* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$ *définisse une fonction de* $L^2(\check{\Lambda}_{x_0} . d\theta/2\pi)$. [*On note* $\check{\Lambda}(\theta) = \Lambda(-\theta)$.]

Cette série, *a priori*, définit seulement une pseudo-fonction, puisque $a_k \underset{|k|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Pour démontrer ce théorème, on utilise la technique développée par le second auteur dans [5] : on considère l'espace $l^1(\mathbb{Z}; E) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}};\ x_n \in E, \forall n \in \mathbb{Z}\}$ muni de la norme $\|(x_n)_n\| = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \|x_n\|$ et le quotient par le sous-espace fermé engendré par les suites de la forme $(\ldots, 0, -Ty, y, 0, \ldots)$, $y \in E$. On note ${}^{\mathbb{Z}}E$ ce quotient. Si x est la classe de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dans ${}^{\mathbb{Z}}E$, on démontre (*voir* [5]) que :

$$\|\tilde{x}\|_{{}^{\mathbb{Z}}E} = \lim_{m\to+\infty} \Big\| \sum_{k\geq -m} T^{m+k} x_k \Big\|.$$

Soit S l'opérateur de déplacement à droite sur $l^1(\mathbb{Z}; E)$ et $\tilde{S}$ l'opérateur quotient sur ${}^{\mathbb{Z}}E$. C'est un opérateur unitaire sur l'espace de Hilbert ${}^{\mathbb{Z}}E$, qui s'identifie à la partie ★-résiduelle de la dilatation unitaire minimale de T, au sens de Sz-Nagy-Foias [4]. Si T est complètement non unitaire, les mesures spectrales scalaires de cet opérateur sont absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue (*voir* [4]) : pour tout $x_0 \in E$, il existe une fonction $\Lambda_{x_0}(\theta)$, intégrable et positive sur le tore $\mathbb{T}$, telle que, pour tout $f \in L^\infty(\mathbb{T})$:

$$\langle f(\tilde{S}) x_0, x_0 \rangle_{{}^{\mathbb{Z}}E} = \int f(\theta) \check{\Lambda}_{x_0}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Les coefficients de Fourier de Λ_{x_0} sont donnés par (*voir* [3]) :

$$\lambda_j = \lim_{m\to+\infty} \langle T^{m+j} x_0, T^m x_0 \rangle, \qquad j \in \mathbb{Z}.$$

Par ailleurs, soit u le plongement canonique de E dans $l^1(\mathbb{Z}; \mathrm{E})$ obtenu en mettant les points de E sur la coordonnée d'indice 0, et soit $\tilde{u}$ l'opérateur de E dans ${}^{\mathbb{Z}}\mathrm{E}$ obtenu par passage au quotient.

En posant, pour $\mathrm{N}, \mathrm{M} \in \mathbb{N}$, $\varphi_{\mathrm{N},\mathrm{M}}(\theta) = \sum_{-\mathrm{N}}^{\mathrm{M}} a_k e^{ik\theta}$, on peut écrire :

$$\left\| \tilde{u}\left(\sum_{-\mathrm{N}}^{\mathrm{M}} a_k \mathrm{T}^k x_0 - \sum_{-\mathrm{N}'}^{\mathrm{M}'} a_k \mathrm{T}^k x_0 \right) \right\|_{\mathbb{Z}_{\mathrm{E}}}^2$$

$$= \left\| \sum_{-\mathrm{N}}^{\mathrm{M}} a_k \tilde{\mathrm{S}}^k u(x_0) - \sum_{-\mathrm{N}'}^{\mathrm{M}'} a_k \tilde{\mathrm{S}}^k \tilde{u}(x_0) \right\|_{\mathbb{Z}_{\mathrm{E}}}^2 = \int |\varphi_{\mathrm{N},\mathrm{M}}(\theta) - \varphi_{\mathrm{N}',\mathrm{M}'}(\theta)|^2 \check{\Lambda}_{x_0}(\theta) \frac{d\theta}{2\pi},$$

et le théorème s'en déduit aussitôt.

Si l'on ne suppose plus la série $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \mathrm{T}^k x_0$ convergente au sens usuel, mais seulement au sens d'Abel (c'est-à-dire qu'il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k r^{|k|} \mathrm{T}^k x_0 \xrightarrow[r \to 1^-]{} x$), la fonction φ est obtenue comme limite, dans $\mathrm{L}^2(\check{\Lambda}_{x_0}(d\theta/2\pi))$, lorsque $r \to 1^-$ des fonctions :

$$\varphi^{(r)}(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k r^{|k|} e^{ik\theta}.$$

Si $x_0 \in \mathrm{E}$ et si $x_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \mathrm{T}^k x_0$, alors $\check{\Lambda}_{x_1} = |\varphi|^2 \check{\Lambda}_{x_0}$, si $\varphi(\theta) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{ik\theta}$. On en déduit :

THÉORÈME 2. — *Supposons que, pour un $\delta > 0$ et un $\varepsilon > 0$, on ait $\| \mathrm{T}^{-n} x_0 \| \geqq \delta (1+\varepsilon)^n$ pour tout $n \geqq 0$. Alors la seule série convergente $\sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k \mathrm{T}^k x_0'$, de somme nulle, telle que la fonction φ associée appartienne à la classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$ [c'est-à-dire vérifie*

$$\sup_{0<r<1} \int \mathrm{Log}^+ |\varphi^{(r)}(\theta)| \, d\theta < +\infty \Big]$$

est la série dont tous les coefficients sont nuls.

Ce théorème est à rapprocher d'un résultat de Sz-Nagy-Foias [4] qui concernait seulement les séries $\sum_{k \geqq 0} a_k \mathrm{T}^k x_0$, avec $\varphi \in \mathrm{H}^\infty(\mathbb{T})$ (mais ne nécessitait pas d'hypothèse sur les $\mathrm{T}^{-k} x_0$); il étend un résultat du premier auteur [2], portant sur les séries $\sum_{k \leqq 0} a_k \mathrm{T}^k x_0$. L'étude du cas où les itérés inverses $\mathrm{T}^{-n} x_0$, $n \geqq 0$ croissent vite présente un intérêt, car c'est le seul cas où l'existence de sous-espaces invariants non triviaux ne soit pas connue (*voir* [1]).

Puisque $\tilde{\mathrm{S}}$ est unitaire, son spectre est contenu dans le cercle unité $\mathscr{C}$. On vérifie aisément qu'il est inclus dans $\mathrm{sp}\,\mathrm{T} \cap \mathscr{C}$. Les fonctions $\check{\Lambda}_x$, $x \in \mathrm{E}$, s'annulent p.p. sur l'ensemble $\{\theta \in \mathbb{T},\ e^{i\theta} \notin \mathrm{Sp}\,\tilde{\mathrm{S}}\}$. Nous obtenons :

THÉORÈME 3. — *Soit λ, avec $|\lambda| = 1$ et $\lambda \notin \mathrm{Sp}\,\tilde{\mathrm{S}}$. L'image de $\mathrm{T} - \lambda \mathrm{I}$ contient tous les points $x \in \mathrm{E}$ tels que :*

$$\| \mathrm{T}^{-k} x \| < \rho_k, \qquad k \in \mathbb{N},$$

pour une certaine suite $(\rho_k)_{k \in \mathbb{N}}$, dépendant de x, et telle que :

$$\begin{cases} \rho_k \geqq 1, \quad \forall k, \quad \rho_{m+n} \leqq \rho_m \cdot \rho_n, \quad \forall m, n, \\ \displaystyle\sum_{k \geqq 0} \frac{\mathrm{Log}\,\rho_k}{1+k^2} < +\infty. \end{cases}$$

COROLLAIRE. — *Si pour tout x il existe une telle suite* $(\rho_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *(en particulier si* $\sum_{k\geq 0} \operatorname{Log}\|T^{-k}\|/(1+k^2)<+\infty$*), le spectre de* $\tilde{S}$ *coïncide avec le spectre de* T.

En effet, le spectre de T est contenu, dans ce cas, dans le cercle unité : il est la réunion des spectres locaux $\sigma_x(T)$, qui y sont tous contenus.

(*) Remise le 22 juin 1981.

[1] B. BEAUZAMY, *Acta Math.*, 144, n° 1-2, p. 65-82.

[2] B. BEAUZAMY, *Comptes rendus*, 290, série A, 1980, p. 467.

[3] B. BEAUZAMY, *Sous-espaces invariants pour les contractions de classe* C_{1}. *et vecteurs cycliques dans* $c_0(\mathbb{Z})$ (à paraître).

[4] B. SZ-NAGY et C. FOIAS, *Analyse harmonique des opérateurs dans l'espace de Hilbert*, Akademiai Kiado, Budapest, 1966.

[5] M. ROME, *Dilatations isométriques d'opérateurs et sous-espaces invariants* [*J. Operator Theory* (à paraître)].

Département de Mathématiques, Université de Lyon-I,
43, *boulevard du* 11-*Novembre*-1918, 69622 *Villeurbanne Cedex.*