Analyse fonctionnelle - Opérateurs de convolution r-sommants sur un groupe compact abélien. Note (*) de MM. Bernard Beauzamy et Bernard Maurey, transmise par M. Laurent Schwartz

Dans cette note, on se propose de donner des conditions nécessaires pour qu'un opérateur de convolution de $L^a(G)$ dans $L^b(G)$, $1 \leq a,b \leq \infty$, soit r-sommant. On obtiendra ensuite des conditions suffisantes, et on donnera des applications.

Soit G un groupe abélien compact, muni de sa mesure de Haar, et soit T un opérateur de $L^a(G)$ dans $L^b(G)$, qui commute avec les translations : si τ_y est défini par $(\tau_y f)(x) = f(x-y)$, on a $\tau_y T = T\tau_y$.

On notera $\check{T}$ la transposée de T, définie de $L^{b'}$ dans $L^{a'}$. $\mathcal{M}(L^a,L^b)$ désignera l'ensemble des opérateurs de convolution de L^a dans L^b. Nous renvoyons à (4) pour la définition des opérateurs r-sommants.

Proposition 1 : Soit T un opérateur de convolution de L^a dans L^b, $1 \leq a,b \leq \infty$. Si T est r-sommant, $1 \leq r \leq a$, alors T opère continûment de L^r dans L^b.

Si $a < \infty$, le résultat provientdu lemme suivant qui utilise un théorème de factorisation (voir (3)) :

Lemme : Soit a, $1 \leq a < \infty$, et T un opérateur d'un espace $L^a(\Omega,\mu)$ dans un Banach E. Si T est r-sommant, $1 \leq r \leq a$, T se factorise au moyen d'un opérateur de $L^a(\Omega,\mu)$ dans $L^r(\Omega,\mu)$, donné par la multiplication par une fonction de $L^\alpha(\Omega,\mu)$ $(\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\alpha})$, et d'un opérateur de $L^r(\Omega,\mu)$ dans E.

Si $a = \infty$, le résultat s'obtient en restreignant T à $\mathcal{C}(G) \subset L^\infty$, et en étudiant sa factorisation de Pietsch. On obtient dans ce cas :

Proposition 2 : Si $r \geq 1$, T est r-sommant de L^∞ dans L^b, si et seulemen si $T \in \mathcal{M}(L^r,L^b)$.

La détermination directe de ces opérateurs est donc très difficile.

Les définitions et les résultats que nous rappelons maintenant sont dus à Garling [1].

- Si E est un Banach et (Ω,μ) un espace mesuré, $T = E \to L^p(\Omega,\mu)$ est dit p-borné s'il existe $f \in L^p$ tel que, pour tout élément e de la boule unité de E, $|T(e)|$ soit majoré par f presque partout.

- Si E et F sont des Banach, T est dit p-bornant si $u \circ T$ est p-borné pour tout opérateur linéaire continu u de F dans un espace $L^p(\Omega,\mu)$.

- Si $T : E \to L^p$ est p-borné, T est p-sommant.

- Si $p \geq 1$ ou si F a la propriété d'approximation métrique, T est p-bornant si et seulement si T' est p-sommant.

Pour un opérateur de convolution, on a le :

<u>Lemme 2</u> : Soit T un opérateur de convolution de L^a dans L^b, $1 \leq a,b \leq \infty$. T est b-borné si et seulement si T opère de L^a dans L^∞.

<u>Proposition 3</u> : Soit T un opérateur de convolution de L^a dans L^b, $1 \leq a,b \leq \infty$. Si T est r-sommant avec $1 \leq r \leq a'$, T est défini par la convolution avec une fonction de L^b (une mesure bornée si $b = 1$).

En effet, pour toute multiplication γ de $L^{a'}$ dans L^r, l'opérateur $\gamma \circ \check{T} : L^{b'} \to L^r$ est r-borné. Il existe donc g dans L^r telle que pour tout f de la boule unité de $L^{a'}$ on ait :

$$|\gamma(x)|\ |\check{T}f(x)| \leq g(x)$$

et donc :

$$|\gamma(x-y)|\ |\check{T}f(x)| \leq g(x-y)$$

On en déduit le résultat en prenant les normes dans $L^r(d\mu(y))$: $\check{T}$ opère de $L^{b'}$ dans L^∞, et donc est donné par la convolution avec une fonction de L^b (ou une mesure si $b = 1$) ; il en est de même de T.

Une méthode analogue permet d'obtenir :

<u>Proposition 4</u> : Soit T un opérateur de convolution de L^a dans L^b, $1 \le a,b \le \infty$, r-sommant pour un $r < \infty$. Pour tout $\gamma \in \mathcal{M}(L^{a'},L^r)$, l'application $\gamma \to \gamma \circ \check{T}$ est continue de $\mathcal{M}(L^{a'},L^r)$ dans L^b (si $b > 1$), ou dans l'ensemble des mesures bornées sur G si $b = 1$.

Si $r \ge a'$, T est continu de L^β dans L^b, $\frac{1}{a}+\frac{1}{r} = \frac{1}{\beta}$. Il en résulte que si T opère de L^a dans L^b strictement, c'est-à-dire n'opère pas de L^{a_1} dans L^b pour un $a_1 < a$, alors T ne peut être r-sommant de L^a dans L^b pour un $r < \infty$.

On peut donner une condition géométrique caractérisant l'image de la boule unité $B^{b'}$ de $L^{b'}$ par $\check{T}$, si T est r-sommant.

<u>Proposition 5</u> : Soit T un opérateur de convolution de L^a dans L^b, $1 \le a,b < \infty$, r-sommant pour un r, $1 \le r < \infty$. Alors :

$$\check{T}(B^{b'}) \subset C\ \overline{\mathrm{conv}}\ (B^{a'} * B^{r'}).$$

On peut, dans certains cas, obtenir des réciproques aux résultats précédents :

<u>Proposition 6</u> : Soit T un opérateur de convolution de L^a dans L^b, $1 \le a,b \le \infty$. Si T est défini par la convolution avec une fonction de $L^{a'}$, T est b-sommant.

Il suffit en effet de factoriser T par L^∞ et l'injection canonique de L^∞ dans L^b, qui est b-sommante.

<u>Proposition 7</u> :

1) Si $1 \le a' < b \le 2$, les conditions suivantes sont équivalentes :
   - T est a'-sommant
   - T est 0-sommant
   - T est défini par une fonction de L^b.

2) Si $1 \le b < a' \le 2$, les conditions suivantes sont équivalentes :
   - T est $a'-\varepsilon$ sommant pour un ε, $0 < \varepsilon < a'$
   - T est 0-sommant
   - T est défini par une fonction de $L^{a'}$.

3) Si $1 \leq b = a' \leq 2$, les conditions suivantes sont équivalentes :

- T est a'-sommant
- T est défini par une fonction de $L^{a'}$ (une mesure si $a' = 1$).

Pour que T soit 0-sommant, il est nécessaire que, pour tout S de $\mathcal{M}(L^{a'},L^1)$, $S \circ T$ soit défini par une fonction de $L^{a'}$, et il est suffisant que T soit défini par une fonction de $L^{a'+\varepsilon}$, pour un $\varepsilon > 0$.

La démonstration utilise la proposition 2 et le théorème de dualité (voir ([4]), exposé V).

On en déduit :

<u>Corollaire</u> :
$$\mathcal{M}(L^{a'},L^1) = \mathcal{M}(L^{a'},L^{a'-\varepsilon})$$
$$\mathcal{M}(L^{a'},L^1) \subset \mathcal{M}(L^{a'+\varepsilon},L^{a'+\varepsilon})$$

si $1 < a' < a' + \varepsilon \leq 2$.

Il suffit en effet de considérer $S \in L^{a'+\varepsilon}$ comme un opérateur de L^a dans $L^{a'+\varepsilon}$, qui est 0-sommant d'après la proposition.

<u>Proposition 8</u> : Si $1 \leq a,b \leq 2$, T est 0-sommant s'il et seulement s'il est défini par une fonction de L^2.

En effet, si T est défini par une fonction de L^2, on peut considérer T comme opérateur de L^1 dans L^2, et il est alors 0-sommant d'après un théorème de Grothendieck[([2]), théorème 94].

Des techniques analogues permettent d'obtenir :

<u>Proposition 9</u> : Soit $T : L^2 \to L^b$, $2 \leq b \leq \infty$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- T est r-sommant pour un $r < \infty$
- T est b-sommant
- T est défini par une fonction de L^2
- T est 0-sommant de $L^{b'}$ dans L^2.

Pour les convolutions de L^a dans L^∞, $1 \leq a \leq 2$, on peut donner un résultat de nature un peu différente :

Proposition 10 : Soit T un opérateur de convolution de L^a dans L^∞, $1 \leq a \leq 2$. T est 2-sommant (ou 0-sommant) si et seulement si la série de ses coefficients de Fourier est absolument convergente.

On en déduit par interpolation une condition suffisante : si les coefficients de Fourier sont dans l^p, l'opérateur est 0-sommant de L^2 dans $L^{p'}$.

Remarque 1 : Les propositions précédentes permettent de prouver que les conditions suffisantes données par L. Schwartz (5) pour les injections 0-radonifiantes dans les espaces de Sobolev sur le tore sont également nécessaires.

Remarque 2 : Dans le cas d'un groupe localement compact non compact (par exemple $\mathbb{R}^n$), on peut montrer qu'il n'y a pas d'opérateurs de convolution r-sommants de L^p dans L^q si $p > 1$, et $r < \infty$.

(*) Séance du

(1) D. J. H. Garling : Lattice bounding, radonifying and absolutely summing mappings. A paraître.

(2) B. Maurey : Théorèmes de factorisation dans les espaces L^p, à paraître dans Astérisque.

(3) Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972-1973, exposé IV, Ecole Polytechnique Paris.

(4) Séminaire Maurey-Schwartz 1972-1973, Exposé V, Ecole Polytechnique Paris.

(5) Séminaire L. Schwartz 1969-1970, Ecole Polytechnique, Paris.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05