ANALYSE HARMONIQUE. — *Une remarque sur un résultat de R. Kaufman.* Note (*) de M. **Bernard Beauzamy**, présentée par M. Laurent Schwartz.

Si une mesure à support compact possède une propriété de Lipschitz d'exposant > 1/2, son image par le mouvement brownien linéaire est presque sûrement à densité lipschitzienne par rapport à la mesure de Lebesgue.

Le résultat suivant est un cas particulier d'un théorème de R. Kaufman [2] [*voir* aussi [1]] :

THÉORÈME [R. Kaufman [2]]. — *Si* μ *est une probabilité portée par un compact de* **R** *satisfaisant à une condition de Lipschitz :*

$$\mu(\mathrm{T}) \ll (\operatorname{diam} \mathrm{T})^b, \qquad \text{avec} \quad b > \frac{1}{2},$$

pour tout borélien T *de* **R**, *son image* $X(\mu)$ *par le mouvement brownien linéaire est presque sûrement une mesure à densité continue par rapport à la mesure de Lebesgue.*

L'objet de cette Note est de montrer que ce résultat peut être amélioré, et d'établir le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Sous les mêmes hypothèses, presque sûrement, la densité de* $\lambda = X(\mu)$ *par rapport à la mesure de Lebesgue appartient à la classe* Λ_β, *si* $\beta < (1/10)(b-(1/2))$.

[On note Λ_β l'ensemble des fonctions f dont le module de continuité $\omega_f(h)$ satisfait à $\sup_{h>0} h^{-\beta}\omega_f(h) < \infty$. On munit cet espace de la norme

$$\|f\|\Lambda_\beta = \sup_{x\in\mathbf{R}} |f(x)| + \sup_{h>0} h^{-\beta}\omega_f(h).]$$

Pour démontrer le théorème, suivant la méthode de R. Kaufman, on choisit une fonction $\varphi \in \mathscr{D}([-2, +2])$, valant 1 sur $[-1, +1]$, et on pose

$$\mathrm{I}(x, k) = \int \varphi\left(\frac{u}{k}\right) e^{2i\pi ux}\hat{\lambda}(u)\,du.$$

On sait [*voir* [1]] que la suite $\mathrm{I}(x, 2^j)$ converge uniformément sur tout compact vers la densité de λ; pour établir le théorème, il suffit donc de montrer que $\mathrm{I}(x, 2^j)$ est de Cauchy dans Λ_β.

Soit h fixé avec $0 < h < 1$, x_1 et x_2 deux réels avec $|x_1 - x_2| < h$. Posant

$$\mathscr{I}(x, k) = \mathrm{I}(x, k) - \mathrm{I}(x, 2k),$$

on montre, en utilisant les méthodes de [2], que l'on a, pour tout entier p au moins égal à 1 :

$$\|\mathscr{I}(x_1, k) - \mathscr{I}(x_2, k)\| \mathrm{L}^p < \mathrm{C}\,h^\beta k^{-\delta},$$

où δ et C sont positifs et indépendants de h, x_1, x_2.

Il en résulte que

$$\mathscr{P}\left\{\frac{\mathscr{I}(x_1, k) - \mathscr{I}(x_2, k)}{h^\beta} > k^{-\gamma}\right\} \leq \mathrm{C}\,k^{(\gamma-\delta)p}.$$

Utilisant le fait que $|(d/dx)\mathcal{I}(x, k)| \ll k^2$, on en déduit si $\gamma'' < \gamma' < \gamma$, une estimation semblable pour

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{\substack{|x_1|\leq k, |x_2|\leq k\\ |x_1-x_2|<h}}\left|\frac{\mathcal{I}(x_1, k)-\mathcal{I}(x_2, k)}{h^\beta}\right| > k^{-\gamma'}\right\},$$

puis une estimation semblable pour

$$\mathcal{P}\left\{\sup_{h>0}\sup_{\substack{|x_1|\leq k, |x_2|\leq k\\ |x_1-x_2|<h}}\left|\frac{\mathcal{I}(x_1, k)-\mathcal{I}(x_2, k)}{h^\beta}\right| > k^{-\gamma''}\right\},$$

ce qui permet, comme dans (2), d'achever la démonstration du théorème.

(*) Séance du 13 septembre 1976.

(1) Y. El Helou, *Analyse de Fourier et trajectoire du mouvement brownien*, d'après R. Kaufman (*Séminaire d'Analyse harmonique*, Orsay, 1974-1975).

(2) R. Kaufman, *Bull. Soc. math. Fr.*, 103, 1975, p. 427-432.

Centre de Mathématiques,
École Polytechnique,
91120 *Palaiseau.*